

Komma-Entwicklung bei gebrochenen Basen

Vom Fachbereich für Mathematik und Informatik
der Technischen Universität Braunschweig

genehmigte Dissertation

zur Erlangung des Grades einer
Doktorin der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat)

von Caroline Ullrich
aus Braunschweig

1.Referent: Prof. Dr. K. Burde
2.Referent: Prof. Dr. A. Kemnitz
Eingereicht: 05. Juli 2001
Prüfung: 25. September 2001

Inhaltsverzeichnis

Bezeichnungen	1
Einleitung	2
1 Entwicklungen von natürlichen Zahlen	6
1.1 Grundlagen	6
1.2 Rechnen im $\frac{r}{s}$ -System	11
1.3 Der $\frac{r}{s}$ -Zähler	15
1.4 Der $\frac{r}{s}$ -Wurzelbaum	17
2 Unendliche Komma-Entwicklung	25
3 Komma-Ganzheitsentwicklung	33
3.1 Die $\frac{r}{s}$ -Komma-Ganzheitsentwicklung	33
3.2 Der $\frac{r}{s}$ -Wurzelkommabaum	35
3.3 Weitere Eigenschaften der Entwicklungen und des Baumes	36
3.4 Existenz und Eindeutigkeit der $\frac{r}{s}$ -Komma-Ganzheitsentwicklungen	39
4 Sichere Stellen	50
5 Werteverteilung	54
5.1 Werteverteilung und Koeffizienten-Verfahren	55
5.2 Das Sprungstellen-Verfahren	64
5.3 Berechnung der Sprungstellen	71
5.4 Beispiele für das Sprungstellen-Verfahren	76
5.5 Betrachtungen für Basen mit $r < 2s - 1$	84
Zusammenfassung	87
Literatur	89

Vorwort

Die vorliegende Arbeit wurde am Institut für Angewandte Algebra der Technischen Universität Braunschweig unter Anleitung von Herrn Prof. Dr. K. Burde angefertigt. Ihm gilt mein besonderer Dank für das interessante Thema und die intensive Betreuung, die die Fertigstellung dieser Arbeit in der kurzen Zeit ermöglichte.

Herrn Prof. Dr. A. Kemnitz danke ich für einige Anregungen und für die Bereitschaft, das 2.Referat zu übernehmen.

Großer Dank gilt auch meinen Eltern, die mir im gesamten Studium und während der Promotion mit Rat und Tat zur Seite standen.

Ferner möchte ich folgenden Personen danken:

Clemens (Mumpi) für das schnelle Korrekturlesen sowie für die hilfreichen Gespräche;

meiner kleinen, großen Schwester Kerstin für die guten Hinweise und die aufbauenden Laufgespräche;

meiner Omi für die leckeren Mahlzeiten und die Hilfe im Haushalt;

meinem Freund Jason für den moralischen Beistand;

Frau Brandes für ihre tägliche Unterstützung.

Außerdem ein Dankeschön an Tanja, Arne, Ernie und Bert, die mich zu dieser Arbeit ermutigt haben, sowie an die Laufgruppe – hier vor allem Lotti und Mercedes Lars – die mir immer geduldig zuhörten.

Bezeichnungen

$] [$	Offenes Intervall
$[]$	Geschlossenes Intervall
\mathbb{N}	Menge der natürlichen Zahlen
\mathbb{N}_0	Menge der natürlichen Zahlen mit Null
\mathbb{R}	Menge der reellen Zahlen
\mathbb{R}^+	Menge der positiven reellen Zahlen
$[a]_s$	größte ganze Zahl x , die kleiner oder gleich a ist und für die gilt $x \equiv 0 \pmod s$
$[a]^\uparrow$	kleinste ganze Zahl, die größer oder gleich a ist
$[a]_\downarrow$	größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich a ist
$\sharp(\beta_h)$	Anzahl der verschiedenen Nachkommawerte
\square	Ende eines Teilbeweises
$\square\square\square$	Ende eines Beweises

Einleitung

Ausgangspunkt der vorliegenden Arbeit sind die von K. Burde in [1] betrachteten Zahlenentwicklungen mit gebrochenen Basen.

Ersetzt man die der Dezimalbruchentwicklung reeller Zahlen zugrundeliegende Zahl 10 durch eine beliebige natürliche Zahl $g > 1$, so erhält man die bekannten „ g -adischen Entwicklungen“. Man kann aber auch gebrochen rationale Zahlen $\frac{r}{s} > 1$; $r, s \in \mathbb{N}$ als Basiszahlen verwenden. Solche $\frac{r}{s}$ -Entwicklungen wurden bereits von H. Kobert [5] sowie von L.C. Eggan und C.L. Vanden Eynden [3] untersucht. In beiden Arbeiten werden die Entwicklungen betrachtet, die man dadurch erhält, daß man jeweils größtmögliche Potenzen von $\frac{r}{s}$ in maximaler Anzahl abspaltet. Die so erhaltene – eindeutig existierende – Entwicklung einer positiven reellen Zahl q

$$q \stackrel{r/s}{\sim} a_k \cdots a_0, a_{-1} a_{-2} \cdots :=$$

$$a_k \left(\frac{r}{s}\right)^k + \cdots + a_1 \left(\frac{r}{s}\right) + a_0 + a_{-1} \left(\frac{r}{s}\right)^{-1} + a_{-2} \left(\frac{r}{s}\right)^{-2} + \cdots$$

$$0 \leq a_j \leq \left\lfloor \frac{r}{s} \right\rfloor_{\downarrow}; \quad j \leq k$$

bezeichnet man als „Entwicklung von vorne“, da man die Koeffizienten von vorne, d.h. zunächst a_k , dann a_{k-1} usw. berechnet.

Anhand der Tabelle

j		5	4	3	2	1	0,	-1	-2	-3	-4	...
$\left(\frac{3}{2}\right)^j$		$\left(\frac{243}{32}\right)$	$\left(\frac{81}{16}\right)$	$\left(\frac{27}{8}\right)$	$\left(\frac{9}{4}\right)$	$\left(\frac{3}{2}\right)$	1,	$\left(\frac{2}{3}\right)$	$\left(\frac{4}{9}\right)$	$\left(\frac{8}{27}\right)$	$\left(\frac{16}{81}\right)$...
a_j		0	1	0	0	0	0,	1	0	0	1	...

erhält man für die Entwicklung „von vorne“ der Zahl 6 zur Basis $\frac{3}{2}$

$$6 \stackrel{3/2}{\sim} 10000, 1001 \cdots.$$

Für eine natürliche Zahl n kann man nun aber auch eine entsprechende $\frac{r}{s}$ -Entwicklung

$$(1) \quad n \stackrel{r/s}{\sim} a_k \cdots a_0 := a_k \left(\frac{r}{s}\right)^k + \cdots + a_1 \left(\frac{r}{s}\right) + a_0;$$

$$a_j \in \{0, \dots, r-1\}; j = 0, \dots, k$$

erhalten, indem man anhand von Kongruenzbetrachtungen modulo r die Koeffizienten „von hinten“, d.h. zunächst a_0 , dann a_1 usw. berechnet (siehe Kapitel 1). Diese Berechnung wird wieder am Beispiel der Zahl 6 zur Basis $\frac{3}{2}$ angegeben:

$$\begin{aligned} 6 &\equiv 0 \pmod{3} &\implies a_0 &= 0 \\ \frac{2}{3}(6 - 0) &= 4 \equiv 1 \pmod{3} &\implies a_1 &= 1 \\ \frac{2}{3}(4 - 1) &= 2 \equiv 2 \pmod{3} &\implies a_2 &= 2 \\ \frac{2}{3}(2 - 2) &= 0 \equiv 0 \pmod{3} &\implies a_3 &= 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ & a_i = 0 & & i \geq 4. \end{aligned}$$

$$6 \stackrel{3/2}{\sim} 210.$$

Diese „Entwicklungen von hinten“ wurden von K. Burde in [1] betrachtet. Während die im allgemeinen unendlichen Entwicklungen „von vorne“ mehr vom analytischen Interesse sind, sind die für natürliche Zahlen stets endlichen Entwicklungen „von hinten“ zahlentheoretisch interessant. Sie werden daher auch als „zahlentheoretische Entwicklungen“ – im Gegensatz zu den „analytischen Entwicklungen“ – bezeichnet. (Beide Entwicklungsarten fallen übrigens bei ganzzahligen Basen g zusammen.)

Durch die Entwicklung der Form (1) werden neben den natürlichen Zahlen auch weitere rationale Zahlen – der Form $\left(\frac{m}{s^t}\right)$; $m, t \in \mathbb{N}$ – dargestellt. Bei den Entwicklungen (1) kann man zu – endlichen – Komma-Entwicklungen übergehen. Rückt man das in (1) nach a_0 stehend gedachte Komma um t Stellen nach links, so wird an Stelle der Zahl n die Zahl $n \left(\frac{s}{r}\right)^t$ dargestellt:

$$(2) \quad n \left(\frac{s}{r}\right)^t \stackrel{r/s}{\sim} a_k \cdots a_t, a_{t-1} \cdots a_0 :=$$

$$a_k \left(\frac{s}{r}\right)^k + \cdots + a_t + a_{t-1} \left(\frac{s}{r}\right)^{t-1} + \cdots + a_0 \left(\frac{s}{r}\right)^{-t}.$$

Mit solchen endlichen Komma-Entwicklungen können weitere Zahlen dargestellt werden, aber offenbar nur rationale. Die übrigen Zahlen, insbesondere alle positiven irrationalen Zahlen besitzen also, wenn überhaupt, entsprechende unendliche Entwicklungen.

Bezüglich solcher „zahlentheoretischen“ unendlichen $\frac{r}{s}$ -Komma-Entwicklungen, die der Gegenstand dieser Arbeit sind und die für den Rest der Einleitung kurz als $\frac{r}{s}$ -Entwicklung bezeichnet werden, ergeben sich sofort eine Reihe von Fragen:

- Besitzt jede positive reelle Zahl q eine solche Entwicklung? (Kapitel 3)
- Ist diese Entwicklung gegebenenfalls eindeutig? (Kapitel 3)
- Welche Eigenschaften besitzen solche Entwicklungen? (Kapitel 3, 5)
- Wie kann man eine solche Entwicklung berechnen? (Kapitel 4)

Bei unendlichen Entwicklungen kann man i.a. natürlich nur endliche Näherungsentwicklungen erhalten, und es ergibt sich als nächste Frage:

- Wie stellt man fest, welche Stellen einer Entwicklung sicher sind? (Kapitel 4)

Was die obigen Fragen betrifft, so wird in Kapitel 3 gezeigt, daß eine positive reelle Zahl i.a. eine eindeutige $\frac{r}{s}$ -Entwicklung besitzt, und in Kapitel 4 wird ein Verfahren zur Aufstellung unendlicher $\frac{r}{s}$ -Entwicklungen einschließlich der Beantwortung der Frage nach den sicheren Stellen angegeben.

Es gibt allerdings – wie übrigens bei allen g -adischen Darstellungen – auch Zahlen, die zwei verschiedene $\frac{r}{s}$ -Entwicklungen besitzen. (Im Dezimalsystem ergeben sich solche verschiedenen Darstellungen z.B. aus der Identität $1, \overline{0} = 0, \overline{9}$.) Diese Zahlen werden hier „ambig“ bzw. „überambig“ genannt, je nachdem ob sie genau zwei bzw. noch mehr verschiedene Entwicklungen besitzen.

Die einzelnen Koeffizienten der $\frac{r}{s}$ -Entwicklung einer reellen Zahl ändern sich sprungartig, wenn diese kontinuierlich die reelle Achse durchläuft (Kilometerzähler). Die reellen Zahlen S , bei denen dabei ein Koeffizient vor dem Komma springt, werden als „Sprungstellen“ bezeichnet.

Bei allen g -adischen Entwicklungen sind diese – ambigen – Sprungstellen die natürlichen Zahlen, im Dezimalsystem z.B.

$$S = 7 = \begin{cases} 6, \overline{9} \\ 7, \overline{0} \end{cases}$$

Hier liegen die Sprungstellen also äquidistant, was daran liegt, daß bei den g -adischen Darstellungen jeweils alle möglichen Koeffizienten-Folgen auftreten.

Bei den $\frac{r}{s}$ -Entwicklungen mit echt-gebrochenen Basen treten dagegen nur spezielle recht unregelmäßig verteilte Koeffizienten-Folgen auf, was zur Folge hat, daß hier die Sprungstellen nicht äquidistant liegen.

In Kapitel 5 wird eine Methode entwickelt, die Sprungstellen näherungsweise zu berechnen. Je kleiner die Basis $\frac{r}{s} > 1$ ist, um so dichter können die zugehörigen Sprungstellen zusammenrücken und um so größer wird der Fehlerterm bei ihrer Berechnung. Für $2 > \frac{r}{s} \geq \frac{3}{2}$ und $r < 2s - 1$ kann nicht mehr ausgeschlossen werden, daß zwei Sprungstellen zu einer Doppelsprungstelle zusammenfallen, für $\frac{3}{2} > \frac{r}{s} \geq \frac{4}{3}$ und $r < 2s - 1$ könnten es sogar drei sein, für $\frac{4}{3} > \frac{r}{s} \geq \frac{5}{4}$ und $r < 2s - 1$ sogar vier usw..

Die Existenz von Doppelsprungstellen ist gleichbedeutend mit der Existenz überambiger Zahlen. Es gibt nun gute Gründe zu vermuten, daß es solche überambigen Zahlen, und damit auch Doppelsprungstellen, nicht gibt. Der Beweis dafür dürfte allerdings schwerfallen, denn die Fragen rund um die Sprungstellenproblematik scheinen zu den schwierigsten zu gehören, die sich im Zusammenhang mit unseren $\frac{r}{s}$ -Entwicklungen ergeben. Abschließend kann man nach den obigen Ausführungen feststellen, daß die Verhältnisse bei den $\frac{r}{s}$ -Entwicklungen um so unübersichtlicher werden, je mehr die Basis $\frac{r}{s}$ sich der „Singularität“ 1 nähert.

Kapitel 1

Entwicklungen von natürlichen Zahlen bezüglich gebrochener Basen

Zur Einführung in die Thematik dieser Arbeit werden in diesem Kapitel die endlichen Entwicklungen betrachtet, da ihre Eigenschaften für das weitere Verständnis von Bedeutung sind. Zunächst werden einige grundlegende Sätze, die K. Burde [1] bewiesen hat, dargestellt.

Im zweiten Teil wird die Addition und die Multiplikation von Zahlen im $\frac{r}{s}$ -System erläutert und der $\frac{r}{s}$ -Zähler beschrieben.

Zum Schluß des Kapitels wird der $\frac{r}{s}$ -Wurzelbaum entwickelt, der zum anschaulichen Verständnis der $\frac{r}{s}$ -Entwicklungen dient.

1.1 Grundlagen

Gibt man zwei natürliche Zahlen r und s mit $r > s$ vor, so besitzt jede natürliche Zahl n eine Entwicklung zur Basis $\frac{r}{s}$, genauer gilt nach K. Burde [1], S. 194:

Satz 1.1

Sind r, s natürliche Zahlen mit $r > s$, so besitzt jede natürliche Zahl n eine endliche $\frac{r}{s}$ -Entwicklung:

$$(1.2) \quad n = a_k \left(\frac{r}{s}\right)^k + a_{k-1} \left(\frac{r}{s}\right)^{k-1} + \cdots + a_1 \left(\frac{r}{s}\right) + a_0;$$
$$a_j \in \{0, \dots, r-1\} \text{ für } j = 0, \dots, k,$$

die genau für teilerfremde r, s eindeutig ist.

Beweis:

Existenz:

Mit den durch

$$(1.3) \quad n_0 = n, \quad n_j \equiv a_j \pmod{r}, \quad n_{j+1} = \frac{s}{r}(n_j - a_j); \quad j = 1, 2, \dots$$

rekursiv erklärten Zahlen $n_j \in \mathbb{N}_0$, $a_j \in \{0, 1, \dots, r-1\}$ gilt

$$n_j = a_j + \left(\frac{r}{s}\right) n_{j+1},$$

$$(1.4) \quad n_j = a_j + a_{j+1} \left(\frac{r}{s}\right) + \dots + a_{j+i} \left(\frac{r}{s}\right)^i + n_{j+i+1} \left(\frac{r}{s}\right)^{i+1}, \quad i \in \mathbb{N}_0.$$

Wegen $r > s$ muß die Folge der n_j aus Betragsgründen mit einem $n_{k+1} = 0$ abbrechen. Das liefert

$$(1.5) \quad n_j = a_j + a_{j+1} \left(\frac{r}{s}\right) + \dots + a_k \left(\frac{r}{s}\right)^{k-j}; \quad 0 \leq j \leq k$$

und insbesondere für $j = 0$ eine Darstellung von $n = n_0$ der verlangten Art.

Eindeutigkeit:

Aus (1.2) erhält man – nach Multiplikation mit s^k – für a_0, a_1, \dots sukzessive die Kongruenzbedingungen (1.3) modulo r , durch welche diese Koeffizienten $a_j \in \{0, 1, \dots, r-1\}$ im teilerfremden Fall $\text{ggT}(r, s) = 1$ eindeutig bestimmt sind. Gilt andererseits $\text{ggT}(r, s) = d > 1$, $r = dr'$, $s = ds'$, so besitzt z.B. die natürliche Zahl $(r-1)$ neben der $\frac{r}{s}$ -Entwicklung $r-1 = a_0$ auch eine sich offensichtlich von dieser unterscheidende $\frac{r'}{s'}$ -Entwicklung, die ebenfalls eine $\frac{r}{s}$ -Entwicklung ist.

□□□

Durch den Existenzteil dieses Beweises gewinnt man die Entwicklung einer natürlichen Zahl n **von hinten** für eine beliebige Basis $\frac{r}{s}$, für die gilt:

$$\text{ggT}(r, s) = 1, \quad \frac{r}{s} > 1, \quad r, s \in \mathbb{N}.$$

Im folgenden soll die Bedingung $\text{ggT}(r, s) = 1$ immer gelten, wenn es nicht ausdrücklich anders erwähnt wird.

Beispiel:

Entwicklung der Zahl 14 von hinten bezüglich der Basis $\frac{3}{2}$:

$$\begin{aligned} n_0 &= 14 && \equiv 2 \pmod{3} \Rightarrow a_0 = 2 \\ n_1 &= \frac{2}{3}(n_0 - a_0) = \frac{2}{3}(14 - 2) = 8 && \equiv 2 \pmod{3} \Rightarrow a_1 = 2 \\ n_2 &= \frac{2}{3}(n_1 - a_1) = \frac{2}{3}(8 - 2) = 4 && \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow a_2 = 1 \\ n_3 &= \frac{2}{3}(n_2 - a_2) = \frac{2}{3}(4 - 1) = 2 && \equiv 2 \pmod{3} \Rightarrow a_3 = 2 \\ n_4 &= \frac{2}{3}(n_3 - a_3) = \frac{2}{3}(2 - 2) = 0 && \equiv 0 \pmod{3} \Rightarrow a_4 = 0 \end{aligned}$$

und es gilt weiter $n_i = a_i = 0$ für alle $i > 4$.

Somit gilt für die Entwicklung:

$$14 = 2 \left(\frac{3}{2}\right)^3 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 2 \left(\frac{3}{2}\right) + 2.$$

Bezeichnung 1.6

Wenn eine Zahl n die $\frac{r}{s}$ -Entwicklung (1.2) besitzt, schreiben wir in Zukunft

$$n \stackrel{r/s}{\sim} a_k a_{k-1} \cdots a_0.$$

Also für das Beispiel:

$$14 \stackrel{3/2}{\sim} 2122.$$

Bemerkung 1.7

Die rechte Seite von (1.2) stellt bei beliebiger Wahl der Koeffizienten nicht immer eine natürliche Zahl dar. Es können auch rationale Zahlen der Form $\frac{m}{s^t}$; $m, s, t \in \mathbb{N}$ dargestellt werden, wobei man nicht alle Zahlen dieser Form darstellen kann. Zum Beispiel kann die Zahl $\frac{1}{2}$ nicht bezüglich der Basis $\frac{3}{2}$ als endliche Entwicklung dargestellt werden.

Im folgenden sollen $\frac{r}{s}$ -Entwicklungen für natürliche Zahlen betrachtet werden. Die bereits im Beweis zu Satz 1.1 benutzten Zahlen n_j erhalten nun einen Namen und sollen eingehender untersucht werden.

Bezeichnung 1.8

Für die **Zwischenzahlen** n_j einer $\frac{r}{s}$ -Entwicklung aus (1.3) erhält man mit der Darstellung (1.5)

$$n_j = a_k \left(\frac{r}{s}\right)^{k-j} + \cdots + a_{j+1} \left(\frac{r}{s}\right) + a_j \stackrel{r/s}{\sim} a_k \cdots a_j \quad 0 \leq j \leq k$$

und damit

$$(1.9) \quad n_j = (n_0 - a_0) \left(\frac{s}{r}\right)^j - a_1 \left(\frac{s}{r}\right)^{j-1} - \cdots - a_{j-1} \left(\frac{s}{r}\right); \quad j = 1, \dots, k.$$

Um die Frage zu beantworten, welche $\frac{r}{s}$ -Entwicklungen nun natürliche Zahlen darstellen, bewies K. Burde ([1] S. 196) die folgenden **Gantheitsbedingungen**:

Satz 1.10

Die rechte Seite von (1.2) stellt genau dann eine ganze natürliche Zahl

$$a_k \cdots a_0 \stackrel{r/s}{\sim} n = n_0 \in \mathbb{N}_0$$

dar, wenn die Koeffizienten a_j bzw. die Zwischenzahlen n_j für $j = 1, \dots, k$ eine der beiden äquivalenten **Ganzheitsbedingungen** (1.11) oder (1.12) erfüllen:

$$(1.11) \quad n_j = a_k \left(\frac{r}{s}\right)^{k-j} + \cdots + a_{j+1} \left(\frac{r}{s}\right) + a_j \equiv 0 \pmod{s}; \quad j = 1, \dots, k.$$

$$(1.12) \quad \begin{cases} a_0 \equiv n_0 \pmod{r} \\ a_j \equiv (n_0 - a_0) \left(\frac{s}{r}\right)^j - \cdots - a_{j-1} \left(\frac{s}{r}\right) \pmod{r}; \quad j = 1, \dots, k. \end{cases}$$

Beweis:

Stellt die Entwicklung $a_k \dots a_0$ eine ganze natürliche Zahl $n = n_0$ dar, so sind die Zwischenzahlen n_j , $j = 1, \dots, k$ nach (1.3) ganzzahlig und sogar durch s teilbar. Damit folgt (1.11) aus (1.5) sowie (1.12) aus (1.3) und (1.9).

Umgekehrt folgt die Ganzzahligkeit von

$$n = n_0 = a_0 + \left(\frac{r}{s}\right) n_1$$

aus (1.11) für $j = 1$.

□□□

Bemerkung 1.13

$\frac{r}{s}$ -Entwicklungen, die ganze Zahlen darstellen, also (1.11) bzw. (1.12) erfüllen, werden $\frac{r}{s}$ -**Ganzheitsentwicklungen** genannt.

Definition 1.14

Gegeben seien zwei verschiedene reelle Zahlen a und b

$$a \stackrel{r/s}{\sim} a_k \cdots a_1 a_0; \quad b \stackrel{r/s}{\sim} b_k \cdots b_1 b_0.$$

Gilt dann für ein $t \leq k$ aus \mathbb{N}_0 , wobei die Anfangskoeffizienten der Entwicklungen auch Null sein können,

$$a_t > b_t \text{ und } a_j = b_j \text{ für alle } j > t,$$

so nennt man a **lexikographisch größer** als b , im Zeichen

$$a \stackrel{r/s}{>} b.$$

Beispiel:

1.) Für die zwei $\frac{5}{3}$ -Entwicklungen $a = 4 \stackrel{5/3}{\sim} 4$ und $b = \frac{5}{3} \stackrel{5/3}{\sim} 10$ mit

$$a = 4 > \frac{5}{3} = b$$

gilt lexikographisch:

$$a \stackrel{5/3}{\sim} 04 < 10 \stackrel{5/3}{\sim} b.$$

2.) Für die zwei $\frac{5}{3}$ -Entwicklungen $a = 20 \stackrel{5/3}{\sim} 3120$ und $b = 10 \stackrel{5/3}{\sim} 310$ mit

$$a = 20 > 10 = b$$

gilt lexikographisch:

$$a \stackrel{5/3}{\sim} 3120 > 0310 \stackrel{5/3}{\sim} b.$$

Diese Beispiele zeigen, daß die lexikographische Anordnung nicht immer mit der natürlichen Anordnung übereinstimmen muß.

Nach K. Burde ([1] , S. 198) gilt:

Satz 1.15

Die durch $\frac{r}{s}$ -Ganzheitsentwicklungen gegebenen lexikographischen Anordnungen stimmen für ganze natürliche Zahlen mit den natürlichen Anordnungen überein.

Beweis:

Die Annahme der Existenz von zwei ganzen Zahlen $n, m \in \mathbb{N}_0$:

$$m = m_0 \stackrel{r/s}{\sim} a_k \cdots a_0, \quad n = n_0 \stackrel{r/s}{\sim} b_t \cdots b_0; \quad a_k, b_t \neq 0$$

mit $m > n$, jedoch m „ $\frac{r}{s}$ -lexikographisch“ kleiner als n , d.h. unter anderem $k \leq t$, soll zum Widerspruch geführt werden.

Offensichtlich kann sich der lexikographische Unterschied dieser beiden Zahlen nicht erst in den letzten beiden Koeffizienten a_0, b_0 zeigen, da diese den Wert von m bzw. n um genau a_0 bzw. b_0 erhöhen. Für die Zwischenzahlen $m_1, n_1 \in \mathbb{N}_0$

$$m_1 \stackrel{r/s}{\sim} a_k \cdots a_1, \quad n_1 \stackrel{r/s}{\sim} b_t \cdots b_1$$

gilt also ebenfalls: m_1 ist lexikographisch kleiner als n_1 . Unter Anwendung von (1.3) ergibt sich

$$m_1 = \frac{s}{r}(m_0 - a_0), \quad n_1 = \frac{s}{r}(n_0 - b_0); \quad a_0, b_0 \in \{0, 1, \dots, r-1\}$$

und somit

$$m_1 > \frac{s}{r}(m_0 - r), \quad n_1 \leq \frac{s}{r}n_0$$

und

$$m_1 > \frac{s}{r}m_0 - s \stackrel{m_0 > n_0}{>} \frac{s}{r}n_0 - s \geq n_1 - s.$$

Da es sich um Entwicklungen ganzer Zahlen handelt, gilt nach (1.11)

$$m_1 \equiv n_1 \equiv 0 \pmod{s},$$

und das liefert

$$m_1 \geq n_1.$$

Da schließlich die $\frac{r}{s}$ -Ganzheitsentwicklungen von m_1 und n_1 verschieden sind, folgt aus der Eindeutigkeit dieser Entwicklungen $m_1 \neq n_1$ und somit

$$m_1 > n_1.$$

Treffen obige Annahmen, die wir zum Widerspruch führen wollen, für $m = m_0$ und $n = n_0$ zu, so gelten sie auch für die Zwischenzahl m_1 und n_1 und entsprechend ebenfalls für die weiteren Zwischenzahlpaare $\{m_2, n_2\}, \{m_3, n_3\}, \dots$, insbesondere auch für das Paar

$$m_k \stackrel{r/s}{\sim} a_k, \quad n_k \stackrel{r/s}{\sim} b_t \cdots b_k; \quad t \geq k.$$

$m_k > n_k$ steht aber im Widerspruch dazu, daß die einstelligen $\frac{r}{s}$ -Ganzheitsentwicklungen gerade die r kleinsten ganzen darstellbaren Zahlen $0, \dots, r-1$ darstellen, für welche die lexikographische Anordnung offensichtlich mit der natürlichen übereinstimmt.

□□□

1.2 Rechnen im $\frac{r}{s}$ -System

Nun soll die Addition und die Multiplikation von natürlichen Zahlen im $\frac{r}{s}$ -System vorgestellt werden.

Addition von natürlichen Zahlen

Die Ganzheitsentwicklungen zweier Zahlen $a, b \in \mathbb{N}_0$ können – mit möglichen Anfangskoeffizienten 0 – in der Form

$$a \stackrel{r/s}{\sim} a_k \cdots a_0, \quad b \stackrel{r/s}{\sim} b_k \cdots b_0$$

angenommen werden.

Für die Addition von a und b im $\frac{r}{s}$ -System berechnet man aus den $a_j, b_j; 0 \leq j \leq k$ zunächst wie folgt gewisse Zahlen $c_i, c_i^* \in \mathbb{N}_0, 0 \leq c_i^* < r$

$$(1.16) \quad \begin{array}{rcl} (*) & a_0 + b_0 & = c_1 r + c_0^* \\ (**) & a_1 + b_1 + c_1 s & = c_2 r + c_1^* \\ (* *) & a_2 + b_2 + c_2 s & = c_3 r + c_2^* \\ & \vdots & \vdots \\ & a_k + b_k + c_k s & = c_{k+1} r + c_k^* \end{array}$$

und gegebenenfalls mit weiteren vorausgestellten Nullkoeffizienten $a_t = b_t = 0; t > k$ entsprechend

$$\begin{array}{rcl} 0 + 0 + c_{k+1} s & = & c_{k+2} r + c_{k+1}^* \\ c_{k+2} s & = & c_{k+3} r + c_{k+2}^* \end{array}$$

Wegen $r > s$ ergibt sich schließlich irgendwann einmal $c_{h+1} = 0$ für $h \geq k$, und das Verfahren endet dann mit der Gleichung

$$c_h \cdot s = c_{h+1} \cdot r + c_h^* = c_h^*; \quad c_{h+1} = 0.$$

Mit diesen c_i, c_i^* erhält man nun

$$\begin{aligned} a + b & \stackrel{(*)}{=} (a_k + b_k) \left(\frac{r}{s}\right)^k + \cdots + (a_1 + b_1) \left(\frac{r}{s}\right) + (c_1 r + c_0^*) \\ & = (a_k + b_k) \left(\frac{r}{s}\right)^k + \cdots + (a_1 + b_1 + c_1 s) \left(\frac{r}{s}\right) + c_0^* \\ & \stackrel{(**)}{=} (a_k + b_k) \left(\frac{r}{s}\right)^k + \cdots + (c_2 r + c_1^*) \left(\frac{r}{s}\right) + c_0^* \\ & = (a_k + b_k) \left(\frac{r}{s}\right)^k + \cdots + (a_2 + b_2 + c_2 s) \left(\frac{r}{s}\right)^2 + c_1^* \left(\frac{r}{s}\right) + c_0^* \\ & \stackrel{(***)}{=} (a_k + b_k) \left(\frac{r}{s}\right)^k + \cdots + (c_3 r + c_2^*) \left(\frac{r}{s}\right)^2 + c_1^* \left(\frac{r}{s}\right) + c_0^* \\ & = (a_k + b_k) \left(\frac{r}{s}\right)^k + \cdots + (a_3 + b_3 + c_3 s) \left(\frac{r}{s}\right)^3 + c_2^* \left(\frac{r}{s}\right)^2 + c_1^* \left(\frac{r}{s}\right) + c_0^* \\ & = \cdots \\ & = c_h^* \left(\frac{r}{s}\right)^h + c_{h-1}^* \left(\frac{r}{s}\right)^{h-1} + \cdots + c_0^* \\ & \stackrel{r/s}{\sim} c_h^* \cdots c_0^* \end{aligned}$$

Bemerkung 1.17

Obiges Additionsverfahren (1.16) entspricht der üblichen schriftlichen Addition, wobei allerdings die Überträge stets Vielfache von r sind, die mit $\frac{s}{r}$ zu multiplizieren sind und so zu den entsprechenden Vielfachen von s werden.

Also

$$(1.18) \quad \begin{array}{cccccccc} a_h & \cdots & a_k & a_{k-1} & \cdots & a_1 & a_0 \\ b_h & \cdots & b_k & b_{k-1} & \cdots & b_1 & b_0 \\ \hline + (r/s) & c_h s & \cdots & c_k s & c_{k-1} s & \cdots & c_1 s \\ \hline c_h r & \cdots & c_k r & c_{k-1} r & \cdots & c_1 r \\ c_h^* & \cdots & c_k^* & c_{k-1}^* & \cdots & c_1^* & c_0^* \end{array},$$

mit $c_{h+1} = 0$ und $a_i = b_i = 0$ für $i = k+1, \dots, h$.

Beispiel:

1.) Addition der beiden Zahlen 16 und 8 im $\frac{3}{2}$ -System:

Es gilt

$$a = 16 \stackrel{3/2}{\sim} 21011 \text{ und } b = 8 \stackrel{3/2}{\sim} 212.$$

Mit der Zwischenrechnung nach (1.16)

$$\begin{array}{llllll} a_0 + b_0 & = & 1 + 2 = 3 & = & 1 \cdot 3 + 0 & \text{mit } c_1 = 1 \text{ und } c_0^* = 0 \\ a_1 + b_1 + c_1 \cdot 2 & = & 1 + 1 + 2 = 4 & = & 1 \cdot 3 + 1 & \text{mit } c_2 = 1 \text{ und } c_1^* = 1 \\ a_2 + b_2 + c_2 \cdot 2 & = & 0 + 2 + 2 = 4 & = & 1 \cdot 3 + 1 & \text{mit } c_3 = 1 \text{ und } c_2^* = 1 \\ a_3 + 0 + c_3 \cdot 2 & = & 1 + 2 = 3 & = & 1 \cdot 3 + 0 & \text{mit } c_4 = 1 \text{ und } c_3^* = 0 \\ a_4 + 0 + c_4 \cdot 2 & = & 2 + 2 = 4 & = & 1 \cdot 3 + 1 & \text{mit } c_5 = 1 \text{ und } c_4^* = 1 \\ c_5 \cdot 2 & = & 2 & = & 0 \cdot 3 + 2 & \text{mit } c_6 = 0 \text{ und } c_5^* = 2 \end{array}$$

erhält man

$$24 = (16 + 8) \stackrel{3/2}{\sim} 210110.$$

2.) Addition der beiden Zahlen 16 und 8 im $\frac{3}{2}$ -System nach Verfahren (1.18):

$$\begin{array}{cccccc} & & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ & & & & 2 & 1 & 2 \\ \hline + (3/2) & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ \hline & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0. \end{array}$$

Multiplikation von natürlichen Zahlen

Gesucht wird ein Verfahren, mit dem die $\frac{r}{s}$ -Ganzheitsentwicklung des Produkts $n \cdot m$ zweier Zahlen $n, m \in \mathbb{N}_0$ über die Ganzheitsentwicklungen mit möglichen Anfangskoeffizienten 0

$$n = n_0 \stackrel{r/s}{\sim} a_k \cdots a_0, \quad m = m_0 \stackrel{r/s}{\sim} b_k \cdots b_0$$

gewonnen wird.

Durch Addition von t Summanden n gemäß (1.16)

$$\begin{array}{r} \begin{array}{ccccccc} a_k & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_0 \\ a_k & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ a_k & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_0 \end{array} \Bigg\} t \\ \hline n \cdot t \stackrel{r/s}{\sim} a_{k(t)}^{(t)} \cdots a_k^{(t)} \cdots a_0^{(t)} \end{array}$$

erhält man eine $\frac{r}{s}$ -Ganzheitsentwicklung von $n \cdot t$. Das entspricht übrigens der üblichen schriftlichen Multiplikation mit derselben Übertragsbehandlung wie bei obiger Addition (1.16).

Beispiel:

1.) Multiplikation von $n = 16 \stackrel{3/2}{\sim} 21011$ und $t = 5$:

$$\begin{array}{r} \begin{array}{ccccccccc} & & & & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & \cdot & 5 \\ + (3/2) & & & & 2 & 4 & 8 & 4 & 2 & 4 & 2 \\ \hline & & & & 3 & 6 & 12 & 6 & 3 & 6 & 3 \end{array} \\ 16 \cdot 5 = 80 \stackrel{3/2}{\sim} 2 \ 1 \ 2 \ 2 \ 1 \ 1 \ 1 \ 2 \end{array}$$

2.) Multiplikation der beiden Zahlen $10 \stackrel{3/2}{\sim} 2101$ und $4 \stackrel{3/2}{\sim} 21$ im $\frac{3}{2}$ -System:

$$\begin{array}{r} \begin{array}{ccccccc} 2 & 1 & 0 & 1 & \cdot & 2 & 1 \\ \hline & & & & 2 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ & & & & & & 2 & 1 & 0 & 1 \\ + (3/2) & & & & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline & & & & 3 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{array} \end{array}$$

d.h. es gilt

$$40 = (10 \cdot 4) \stackrel{3/2}{\sim} 2101121.$$

Bemerkung 1.19

Die aus den oben beschriebenen Verfahren resultierenden $\frac{r}{s}$ -Entwicklungen der ganzzahligen Summen bzw. der ganzzahligen Produkte ganzer Zahlen sind nach Satz 1.1 und Satz 1.10 die eindeutigen $\frac{r}{s}$ -Ganzheitsentwicklungen.

1.3 Der $\frac{r}{s}$ -Zähler

Es läßt sich ein $\frac{r}{s}$ -Zähler konstruieren, der im Prinzip wie ein üblicher Kilometerzähler funktioniert.

Während letzterer die Dezimaldarstellungen der natürlichen Zahlen in natürlicher Reihenfolge liefert, werden auf dem „ $\frac{r}{s}$ -Zähler“ jedoch die $\frac{r}{s}$ -Ganzheitsentwicklungen der natürlichen Zahlen ablesbar sein.

Ein üblicher Kilometerzähler besteht aus einer Anzahl von Rädchen, auf denen sich jeweils die Ziffern $0, 1, \dots, 9$ befinden. Diese sind so miteinander verbunden, daß jedes Rädchen bei einem Nulldurchgang das links von ihm befindliche Rädchen um eine Ziffer mitnimmt.

Unser $\frac{r}{s}$ -Zähler ist im Prinzip ebenso konstruiert, auf den Rädchen befinden sich hier jedoch jeweils die Ziffern $0, 1, \dots, r-1$ und ein Rädchen nimmt bei einem Nulldurchgang das links von ihm befindliche Rädchen um s Ziffern mit.

Nach der vorher beschriebenen schriftlichen Addition im $\frac{r}{s}$ -System geht dann dieser $\frac{r}{s}$ -Zähler von der $\frac{r}{s}$ -Ganzheitsdarstellung einer natürlichen Zahl m zu der von $(m+1)$ über, wenn das ganz rechts befindliche Rädchen um eine Ziffer weitergedreht wird, liefert also somit in der Tat die $\frac{r}{s}$ -Ganzheitsentwicklung der natürlichen Zahlen in natürlicher Reihenfolge (vergleiche Spektrum der Wissenschaft [2] S.11/12).

Wie bei einem normalen Kilometerzähler tritt auch bei einem $\frac{r}{s}$ -Zähler mit $\text{ggT}(r, s) = 1$ jede beliebige Kombination von endlich vielen Endziffern irgendwann einmal auf, sogar beliebig oft.

Genauer erhält man bei r^n aufeinanderfolgenden Zählschritten bzw. natürlichen Zahlen alle Kombinationsmöglichkeiten für die letzten n Ziffern, die sich dann mit der Periode r^n wiederholen.

Ist $a \stackrel{r/s}{\sim} a_k \cdots a_{n-1} \cdots a_0$ die kleinste natürliche Zahl mit den vorgegebenen n letzten Ziffern a_0, a_1, \dots, a_{n-1} , so erhält man genau alle natürlichen Zahlen mit diesen letzten n Ziffern in der Form

$$(1.20) \quad a + i \cdot r^n; \quad i \in \mathbb{N}_0.$$

Damit ergibt sich für die $\frac{r}{s}$ -Ganzheitsentwicklung:

Korollar 1.21

Jede beliebige endliche Folge der Ziffern $0, 1, \dots, r-1$ ist – sogar unendlich oft – letzter Abschnitt einer $\frac{r}{s}$ -Ganzheitsentwicklung.

Es soll nun die kleinste natürliche Zahl $a \in \mathbb{N}_0$ mit

$$a \stackrel{r/s}{\sim} a_k \cdots a_{n-1} \cdots a_0,$$

deren $\frac{r}{s}$ -Ganzheitsentwicklung mit den n vorgegebenen Ziffern a_{n-1}, \dots, a_0 endet, berechnet werden.

Die r -adische Darstellung von a lautet

$$a = a'_{n-1}r^{n-1} + \dots + a'_1r + a'_0,$$

da ein Weiterzählen um Vielfache von r^n nach obigem nichts an den letzten n Ziffern verändert.

Aus der oben beschriebenen Mechanik des $\frac{r}{s}$ -Zählers ergibt sich mit gewissen $c_j \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned} a'_0 &= a_0 \\ a'_1 \cdot s &= a_1 + c_1 \cdot r \\ c_1 \cdot s + a'_2 \cdot s^2 &= a_2 + c_2 \cdot r \\ c_2 \cdot s + a'_3 \cdot s^3 &= a_3 + c_3 \cdot r \\ &\vdots \\ c_{n-1} \cdot s + a'_n \cdot s^n &= a_n + c_n \cdot r, \end{aligned}$$

mit $a_j, a'_j \in \{0, 1, \dots, r-1\}$.

Hieraus lassen sich die a'_j aus den vorgegebenen a_j für $j = 0, \dots, n-1$ berechnen. Damit erhält man a und schließlich auch die $\frac{r}{s}$ -Ganzheitsentwicklung von a .

Beispiel:

1.) Berechnung der Zahlen, die im $\frac{5}{4}$ -System auf 11111 enden:

$$\begin{aligned} a'_0 &= 1 \\ a'_1 \cdot 4 &= 1 + c_1 \cdot 5 \Rightarrow a'_1 = 4, c_1 = 3 \\ 3 \cdot 4 + a'_2 \cdot 16 &= 1 + c_2 \cdot 5 \Rightarrow a'_2 = 4, c_2 = 15 \\ 15 \cdot 4 + a'_3 \cdot 64 &= 1 + c_3 \cdot 5 \Rightarrow a'_3 = 4, c_3 = 63 \\ 63 \cdot 4 + a'_4 \cdot 256 &= 1 + c_4 \cdot 5 \Rightarrow a'_4 = 4, c_4 = 255. \end{aligned}$$

Daraus folgt für die kleinste dieser Zahlen:

$$1 + 4 \cdot 5 + 4 \cdot 5^2 + 4 \cdot 5^3 + 4 \cdot 5^4 = 3121.$$

Damit erhält man alle Zahlen, deren $\frac{5}{4}$ -Ganzheitsentwicklung auf 11111 enden:

$$3121 + i \cdot 5^5; \quad \text{mit } i \in \mathbb{N}_0.$$

Die gesamte $\frac{5}{4}$ -Ganzheitsentwicklung von 3121 lautet schließlich

$$3121 \stackrel{5/4}{\sim} 432103134003434321021011111.$$

2.) Berechnung der Zahlen, die im $\frac{9}{2}$ -System auf 7266380 enden:

$$\begin{aligned}
 a'_0 &= 0 \\
 a'_1 \cdot 2 &= 8 + c_1 \cdot 9 \Rightarrow a'_1 = 4, c_1 = 0 \\
 0 \cdot 2 + a'_2 \cdot 4 &= 3 + c_2 \cdot 9 \Rightarrow a'_2 = 3, c_2 = 1 \\
 1 \cdot 2 + a'_3 \cdot 8 &= 6 + c_3 \cdot 9 \Rightarrow a'_3 = 5, c_3 = 4 \\
 4 \cdot 2 + a'_4 \cdot 16 &= 6 + c_4 \cdot 9 \Rightarrow a'_4 = 1, c_4 = 2 \\
 2 \cdot 2 + a'_5 \cdot 32 &= 2 + c_5 \cdot 9 \Rightarrow a'_5 = 5, c_5 = 18 \\
 18 \cdot 2 + a'_6 \cdot 64 &= 7 + c_6 \cdot 9 \Rightarrow a'_6 = 7, c_6 = 53.
 \end{aligned}$$

Daraus folgt für die kleinste dieser Zahlen:

$$0 + 4 \cdot 9 + 3 \cdot 9^2 + 5 \cdot 9^3 + 1 \cdot 9^4 + 5 \cdot 9^5 + 7 \cdot 9^6 = 4025817.$$

Damit erhält man alle Zahlen, deren $\frac{9}{2}$ -Ganzheitsentwicklungen auf 7266380 enden:

$$4025817 + i \cdot 9^7; \quad \text{mit } i \in \mathbb{N}_0.$$

Beispiel 1.) entspricht dem Problem der fünf Schiffbrüchigen, die auf einer Insel Kokosnüsse sammeln (siehe hierzu Spektrum der Wissenschaft [2], S.11/12).

In diesem Fall kann man das Ergebnis übrigens wesentlich schneller erhalten. Nach der Mechanik des $\frac{5}{4}$ -Zählers werden aus fünf Endeinsen nach 4 Zählsschritten fünf Endnullen, d.h. die Darstellung einer durch 5^5 teilbaren Zahl. Die gesuchte – minimale – Zahl ist somit

$$5^5 - 4 = 3125 - 4 = 3121.$$

1.4 Der $\frac{r}{s}$ -Wurzelbaum

Zunächst sollen einige Definitionen aus der Graphentheorie (siehe A. Kaufmann [4] und R.J. Wilson [7]) vorangestellt werden, die man im folgenden benötigt, um die $\frac{r}{s}$ -Ganzheitsentwicklungen anschaulicher darstellen zu können.

Definition 1.22

1. Ein **schlichter Graph** G ist ein Paar $V(G), E(G)$, wobei $V(G)$ die nicht-leere Menge von Elementen ist, die man als **Knoten** (Ecken) bezeichnet, und $E(G)$ eine endliche Menge ungeordneter Paare von verschiedenen Elementen aus $V(G)$, **Kanten** genannt;

$V(G)$ ist die Knotenmenge und $E(G)$ ist die Kantenmenge.

2. Wenn $V(G)$ und $E(G)$ endlich sind, dann nennt man den Graphen G **endlich**, ansonsten nennt man den Graphen unendlich.
3. Einen Graphen nennt man **gerichtet**, wenn jede Kante eine Orientierung erhält, die durch einen Pfeil gekennzeichnet ist.
4. Bei einem gerichteten Graphen ist der **Innengrad** eines Knotens die Anzahl der Kanten, die in den Knoten führen, der **Außengrad** eines Knotens ist die Anzahl der Kanten, die aus ihm herausführen.
5. Ein **Weg** ist eine Folge von gerichteten Kanten a_0, \dots, a_k , so daß der Endpunkt jeder gerichteten Kante dem Anfangspunkt der folgenden entspricht.
6. Die **Länge** eines Weges ist gleich der Anzahl der enthaltenen gerichteten Kanten. Ist w der Weg, so bezeichnet man seine Länge mit $l(w)$.
7. Ein **Zyklus** ist ein endlicher Weg, in dem der Anfangsknoten mit dem Endknoten zusammenfällt.
8. Ein **antizyklischer** Graph ist ein Graph, der keinen Zyklus enthält.

Definition 1.23

1. Ein antizyklischer gerichteter Graph heißt **Wurzelbaum** B , wenn:
 - (a) ein und nur ein Knoten existiert, zu dem keine Kante führt – dieser Knoten heißt **Wurzel**;
 - (b) zu allen anderen Knoten eine und nur eine Kante führt.
2. Ein Baum als Teilgraph mit den gleichen Eigenschaften wie die des Wurzelbaumes heißt **Unterwurzelbaum**.

Bezeichnung 1.24

1. Die Knoten, die über n Kanten mit der Wurzel verbunden sind, liegen in der n -ten Ebene.
2. Wege von der Wurzel in die n -te Ebene $n \in \mathbb{N}_0$ werden als **(0,n)-Wege** bezeichnet. Wege von einem Knoten in der k -ten Ebene zu einem Knoten in der n -ten Ebene $k, n \in \mathbb{N}_0$ werden als **(k,n)-Wege** bezeichnet.
3. Knoten mit dem Außengrad $m \in \mathbb{N}$ werden als **m-Knoten** bezeichnet.

Konstruktion des Wurzelbaumes

Zur anschaulichen Darstellung der $\frac{r}{s}$ -Ganzheitsentwicklungen benutzt man einen Wurzelbaum, dessen Knoten den dargestellten – natürlichen – Zahlen und dessen Kanten den Entwicklungskoeffizienten entsprechen.

Wir konstruieren zunächst einen umfassenderen Baum, von dessen Knoten jeweils r Kanten ausgehen, die mit $0, 1, 2, \dots, r-1$ indiziert seien (siehe Abbildung 1.1).

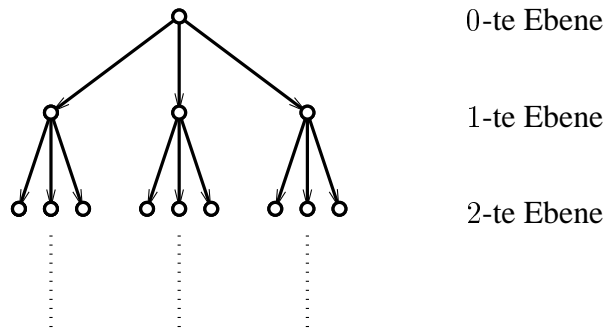


Abbildung 1.1: Baum für 3 Ebenen mit $r = 3$

Von der Wurzel aus, welcher die Zahl 0 zugeordnet sei, führt zu jedem Knoten in der k -ten Ebene dieses Baumes genau ein Weg, genauer ein $(0, k)$ -Weg. Sind dessen k Kanten, von der Wurzel aus gezählt, mit

$$a_0, a_1, \dots, a_{k-1}; \quad a_j \in \{0, 1, \dots, r-1\}$$

indiziert – man spricht dann von dem Weg $w(a_0, a_1, \dots, a_{k-1})$ – so wird diesem Knoten die Zahl

$$(1.25) \quad n_k \stackrel{r/s}{\sim} a_0 a_1 \cdots a_{k-1}$$

zugeordnet. Diese Zahlen sind nach Satz 1.10 genau dann natürliche Zahlen, wenn bei der Auswahl der Koeffizienten a_0, a_1, \dots, a_{k-2} bzw. bei der Auswahl der entsprechenden Kanten die Ganzheitsbedingungen (1.11) erfüllt sind. Wählt man auch a_{k-1} gemäß den Ganzheitsbedingungen, so erhält man stets Vielfache von s . Man spricht dann von den **totalen Ganzheitsbedingungen**.

Der eben konstruierte Baum soll nun so ausgelichtet werden, daß er nur noch die Kantenfolgen enthält, die den totalen Ganzheitsbedingungen genügen. Seinen Knoten sind dann stets Vielfache von s zugeordnet, d.h. es sind den Knoten der n -ten Ebene unseres ausgelichteten Baumes genau die Vielfachen von s zugeordnet, welche eine totale Ganzheitsentwicklung (1.25) der Länge n besitzen.

Da alle natürlichen Vielfachen von s eine totale $\frac{r}{s}$ -Ganzheitsentwicklung besitzen und bei diesen nach Satz 1.15 die lexikographische Anordnung der dargestellten

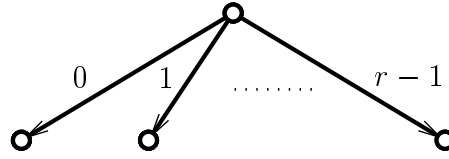


Abbildung 1.2: Kantenkoeffizienten in natürlicher Reihenfolge

Zahlen mit deren natürlicher Anordnung übereinstimmt, entsprechen die Knoten der n -ten Ebene den ersten Vielfachen

$$(1.26) \quad \begin{aligned} &0, s, 2s, \dots, (A(n) - 1) \cdot s \\ &A(n) : \text{Knotenanzahl in der } n\text{-ten Ebene} \end{aligned}$$

von s und zwar wieder nach Satz 1.15 auch in dieser Reihenfolge, wenn die Kanten des Ausgangsbaumes wie in Abbildung 1.2 in der natürlichen Reihenfolge indiziert werden, was von jetzt ab vorausgesetzt wird.

Die Knotenanzahl $A(n)$ in der n -ten Ebene, insbesondere das Wachstum für $n \rightarrow \infty$ wird später noch betrachtet.

Nach Konstruktion sind den Zwischenknoten des Weges $w(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$, siehe Abbildung 1.3, die Zahlen

$$n_j \stackrel{r/s}{\sim} a_0 \cdots a_{j-1}; \quad j = 1, \dots, n,$$

zugeordnet. Diese sind die Zwischenzahlen¹ aus Definition 1.8.

Bezeichnung 1.27

Der zur Basis $\frac{r}{s}$ ausgelichtete Wurzelbaum soll mit $\frac{r}{s}$ -Wurzelbaum $B_{\frac{r}{s}}$ bezeichnet werden.

Knotenkoeffizienten, Kantenkoeffizienten und Knotenanzahl pro Ebene im $\frac{r}{s}$ -Wurzelbaum

Die Koeffizienten zweier aufeinanderfolgender Knoten im $\frac{r}{s}$ -Wurzelbaum sind nach (1.3), unter Berücksichtigung der Fußnote 1), durch

$$n_{j+1} = \frac{r}{s}n_j + a_j; \quad j \in \mathbb{N}_0$$

verknüpft, wobei a_j der Koeffizient der sie verbindenden Kante ist. Nach (1.26) enthält der Baum nun genau die Kante, für deren Koeffizient

¹Die Indizierungen sowohl der Entwicklungskoeffizienten als auch der Zwischenzahlen verlaufen hier und in Bezeichnung 1.8 in entgegengesetzter Richtung.

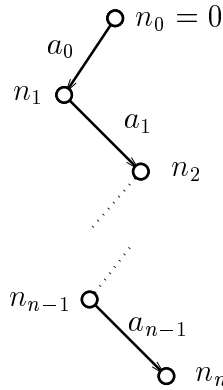


Abbildung 1.3: Kanten und Knoten des Weges $w(a_0, \dots, a_{n-1})$

$$(1.28) \quad \frac{r}{s}n_j + a_j \equiv 0 \pmod{s}$$

gilt. Da der t -te Knoten jeder Ebene wieder nach (1.26) den Koeffizient $(t-1)s$ besitzt, gehen von diesem nach (1.28) genau die Kanten aus, deren Koeffizienten

$$(1.29) \quad a_j = a \text{ mit } a \equiv -r(t-1) \pmod{s}, \quad 0 \leq a < r$$

erfüllen.

Das anhand von (1.29) leicht berechenbare Schema der ausgehenden Kanten ist somit in allen Ebenen gleich und von der Periode s .

Bemerkung 1.30

Für die Gesamtheit der Koeffizienten der von s aufeinanderfolgenden Knoten einer Ebene ausgehenden Kanten, wenn also t und damit wegen $\text{ggT}(r, s) = 1$ auch $-r(t-1)$ alle Restklassen modulo s durchläuft, geht die Kongruenzbedingung in (1.29) über in die Aussage:

Die Koeffizienten der Kanten, die von s aufeinanderfolgenden Knoten ausgehen, sind verschieden.

Zusammen mit der zweiten Bedingung von (1.29)

$$0 \leq a < r$$

ergibt sich, daß von solchen s Knoten insgesamt genau r Kanten mit den Koeffizienten $0, 1, \dots$ ausgehen, diese s Knoten somit genau r Knoten in der nachfolgenden Ebene „erzeugen“.

Beispiel:

1.) $\frac{r}{s} = \frac{4}{3}$, also $0 \leq a < 4$:

$$\begin{aligned} t = 1 \equiv 1 \pmod{3} &\xRightarrow{(1.29)} a \equiv 0 \pmod{3} \implies a \in \{0, 3\} \\ t = 2 \equiv 2 \pmod{3} &\xRightarrow{(1.29)} a \equiv 2 \pmod{3} \implies a = 2 \\ t = 3 \equiv 0 \pmod{3} &\xRightarrow{(1.29)} a \equiv 1 \pmod{3} \implies a = 1. \end{aligned}$$

2.) $\frac{r}{s} = \frac{9}{4}$, also $0 \leq a < 9$:

$$\begin{aligned} t = 1 \equiv 1 \pmod{4} &\xRightarrow{(1.29)} a \equiv 0 \pmod{4} \implies a \in \{0, 4, 8\} \\ t = 2 \equiv 2 \pmod{4} &\xRightarrow{(1.29)} a \equiv 3 \pmod{4} \implies a \in \{3, 7\} \\ t = 3 \equiv 3 \pmod{4} &\xRightarrow{(1.29)} a \equiv 2 \pmod{4} \implies a \in \{2, 6\} \\ t = 4 \equiv 0 \pmod{4} &\xRightarrow{(1.29)} a \equiv 1 \pmod{4} \implies a \in \{1, 5\}. \end{aligned}$$

Bemerkung 1.31

Da die Anzahl der von einem Knoten ausgehenden Kanten als Lösungszahl von (1.29) nur um eins variieren kann, folgt aus obigem mit

$$\left\lfloor \frac{r}{s} \right\rfloor_{\downarrow} < \frac{r}{s} < \left\lceil \frac{r}{s} \right\rceil^{\uparrow} = \left\lfloor \frac{r}{s} \right\rfloor_{\downarrow} + 1,$$

daß in $B_{\frac{r}{s}}$ nur $\left\lfloor \frac{r}{s} \right\rfloor_{\downarrow}$ -Knoten und $\left\lceil \frac{r}{s} \right\rceil^{\uparrow}$ -Knoten vorkommen, und zwar bei s aufeinanderfolgenden Knoten beider Sorten.

Beispiel:

In Abbildung 1.4 sind die ersten 4 Ebenen des Wurzelbaums $B_{\frac{3}{2}}$ dargestellt.

Für die Basis gilt $1 < \frac{3}{2} < 2$; also kann der Baum nur 1- und 2-Knoten enthalten.

Nach (1.29) gilt:

$$\begin{aligned} t = 1 \equiv 1 \pmod{2} &\xRightarrow{(1.29)} a \equiv 0 \pmod{2} \implies a \in \{0, 2\} \\ t = 2 \equiv 0 \pmod{2} &\xRightarrow{(1.29)} a \equiv 1 \pmod{2} \implies a = 1. \end{aligned}$$

Bezeichnung 1.32

1. Ein **Unterwurzelbaum** zur Basis $\frac{r}{s}$ wird mit $UB_{\frac{r}{s}}$ bezeichnet.
2. Die n -te **Ebene** des $\frac{r}{s}$ -Baumes bzw. $\frac{r}{s}$ -Unterbaumes wird mit $B_{\frac{r}{s}}(n)$ bzw. mit $UB_{\frac{r}{s}}(n)$ bezeichnet.

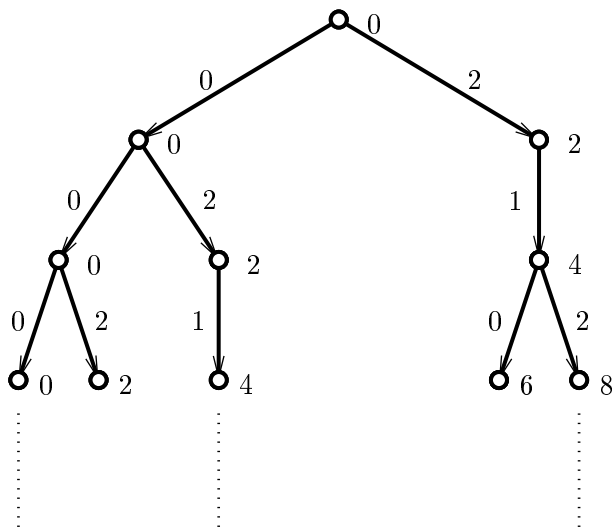


Abbildung 1.4: $\frac{3}{2}$ -Wurzelbaum für die ersten 4 Ebenen

3. Die **Knotenanzahl** von $B_{\frac{r}{s}}$ bzw. $UB_{\frac{r}{s}}$ in der n -ten Ebene $B_{\frac{r}{s}}(n)$ bzw. $UB_{\frac{r}{s}}(n)$ des entsprechenden Baumes wird mit

$$A(B_{\frac{r}{s}}(n)) \text{ bzw. } A(UB_{\frac{r}{s}}(n))$$

bezeichnet.

Satz 1.33

In jedem Wurzelbaum $B_{\frac{r}{s}}$ gilt für die Knotenanzahl $A(B_{\frac{r}{s}}(j+t))$:

$$(1.34) \quad A(B_s(j+t)) \geq \left(\frac{r}{s}\right)^t \left(A(B_s(j)) - (s-1) \sum_{i=1}^t \left(\frac{s}{r}\right)^i \right); \quad t, j \in \mathbb{N}_0.$$

Im folgenden Beweis wird der Index von $A(B_s^r)$ weggelassen, da die Basis $\frac{r}{s}$ eindeutig ist.

Beweis:

Aus $\left[\frac{r}{s}\right]_{\downarrow} < \frac{r}{s} < \left[\frac{r}{s}\right]_{\uparrow}$ resultiert, daß nur $\left[\frac{r}{s}\right]_{\downarrow}$ -Knoten und $\left[\frac{r}{s}\right]_{\uparrow}$ -Knoten in dem Baum vorkommen können.

In der $(j + 1)$ -ten Ebene gilt nach Bemerkung 1.30 für die Knotenanzahl:

$$A(B(j+1)) = \binom{r}{s} A(B(j)) \quad \text{für } A(B(j)) \equiv 0 \pmod{s},$$

da von jeweils s aufeinanderfolgenden Knoten r Knoten in der nächsten Ebene erzeugt werden.

Damit folgt eine untere Grenze für die Knotenanzahl $A(B(j+1))$ in der Ebene $B(j+1)$:

$$A(B(j+1)) \geq \left(\frac{r}{s}\right) (A(B(j)) - (s-1))$$

und für $A(B(j+2))$:

$$\begin{aligned} A(B(j+2)) &\geq \left(\frac{r}{s}\right) (A(B(j+1)) - (s-1)) \\ &\geq \left(\frac{r}{s}\right)^2 A(B(j)) - (s-1) \left(\frac{r}{s}\right)^2 - (s-1) \left(\frac{r}{s}\right). \end{aligned}$$

So erhält man für die Knotenzahl $A(B(j+t))$ mit $t > j \in \mathbb{N}$ die untere Schranke:

$$\begin{aligned} A(B(j+t)) &\geq \left(\frac{r}{s}\right)^t A(B(j)) - (s-1) \left(\frac{r}{s}\right)^{t-1} - \dots - (s-1) \left(\frac{r}{s}\right) \\ &= \left(\frac{r}{s}\right)^t \left(A(B(j)) - \left((s-1) \left(\frac{s}{r}\right) + \dots + (s-1) \left(\frac{s}{r}\right)^{t-1} \right) \right) \\ &= \left(\frac{r}{s}\right)^t \left(A(B(j)) - (s-1) \sum_{i=1}^{t-1} \left(\frac{s}{r}\right)^i \right). \end{aligned}$$

□□□

Bemerkung 1.35

Man kann die Summe in (1.34) noch weiter abschätzen mit

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (s-1) \sum_{i=1}^{t-1} \left(\frac{s}{r}\right)^i = (s-1) \frac{r}{r-s}$$

und erhält dann eine untere Schranke mit

$$A(B_s(j+t)) \geq \left(\frac{r}{s}\right)^t \left(A(B_s(j)) - (s-1) \left(\frac{r}{r-s}\right) \right).$$

Kapitel 2

Unendliche

$\frac{r}{s}$ -Komma-Entwicklungen

Mit den bisher betrachteten endlichen $\frac{r}{s}$ -Entwicklungen läßt sich nur eine Teilmenge von rationalen Zahlen der Form $\left(\frac{m}{s^t}\right)$ mit $m, t \in \mathbb{N}_0$, darstellen, siehe Bemerkung 1.7.

Ziel dieser Arbeit ist die Darstellung aller positiver reeller Zahlen durch unendliche $\frac{r}{s}$ -Komma-Entwicklungen. In diesem Kapitel werden beliebige solche Entwicklungen betrachtet, später im Kapitel 3 werden dann nur die speziellen Entwicklungen untersucht, die den Ganzheitsbedingungen genügen.

Jede Entwicklung

$$(2.1) \quad a_0 \cdots a_{k-1}, a_k \cdots a_i \cdots \underset{r/s}{\sim} \sum_{j=0}^{\infty} a_j \left(\frac{s}{r}\right)^{j-k+1} = q,$$

$$\text{mit } a_j \in \{0, \dots, r-1\} \text{ und } a_0 \neq 0$$

stellt eine nicht-negative reelle Zahl q dar. Die Entwicklungen (2.1) reeller Zahlen q sind nicht eindeutig. Es existieren, wie im folgenden gezeigt wird, sogar jeweils unendlich viele verschiedene $\frac{r}{s}$ -Komma-Entwicklungen für ein solches q .

Für diese Entwicklungen ergibt sich

$$(2.2) \quad q_{j+1} = \frac{r}{s}(q_j - a_j); \quad q_j \sim a_j, a_{j+1} \cdots,$$

und mit

$$(r-1), (r-1)(r-1) \cdots \underset{r/s}{\sim} (r-1) \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{s}{r}\right)^j = (r-1) \frac{1}{1 - \frac{s}{r}} = \frac{(r-1)r}{r-s}$$

die notwendigen Bedingungen

$$(2.3) \quad 0 \leq q_j \leq \frac{r(r-1)}{r-s} \text{ für } j \in \mathbb{N}_0.$$

Diese werden nach (2.2) offenbar genau dann erfüllt, wenn die Koeffizienten gemäß

$$(2.4) \quad a_j = \begin{cases} 0 & 0 \leq q_j < 1 \\ 0 \vee 1 & 1 \leq q_j < 2 \\ 0 \vee 1 \vee 2 & 2 \leq q_j < 3 \\ \vdots & \vdots \\ 0 \vee 1 \vee \dots \vee (r-1) & \text{für } (r-1) \leq q_j \leq \frac{(r-1)s}{r-s} \\ 1 \vee \dots \vee (r-1) & \frac{(r-1)s}{r-s} < q_j \leq \frac{(r-1)s}{r-s} + 1 \\ \vdots & \vdots \\ (r-1) & \frac{(r-1)r}{r-s} - 1 < q_j \leq \frac{(r-1)r}{r-s} \end{cases}$$

gewählt werden.

Satz 2.5

Genau dann, wenn die a_j nach (2.4) gewählt werden, ergibt sich eine gegen $q \in \mathbb{R}^+$ konvergente Entwicklung:

$$q = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \left(\frac{s}{r}\right)^{j-k+1}.$$

Beweis:

„ \Rightarrow “:

Seien die Koeffizienten a_j gemäß (2.4) gewählt, und damit die Ungleichungen (2.3) also erfüllt. Mit (2.2)

$$q_j = a_j + \left(\frac{s}{r}\right) q_{j+1}$$

erhält man

$$\begin{aligned} q &= \left(\frac{r}{s}\right)^{k-1} q_0 = \left(\frac{r}{s}\right)^{k-1} \left(a_0 + \left(\frac{s}{r}\right) q_1\right) = \left(\frac{r}{s}\right)^{k-1} a_0 + \left(\frac{r}{s}\right)^{k-2} \left(a_1 + \left(\frac{s}{r}\right) q_2\right) \\ &= \left(\frac{r}{s}\right)^{k-1} a_0 + \left(\frac{r}{s}\right)^{k-2} a_1 + \left(\frac{r}{s}\right)^{k-3} q_2 \\ &= \dots, \end{aligned}$$

allgemein

$$(2.6) \quad q = \left(\frac{r}{s}\right)^{k-1} a_0 + \left(\frac{r}{s}\right)^{k-2} a_1 + \cdots + \left(\frac{r}{s}\right)^{k-j} a_{j-1} + \left(\frac{r}{s}\right)^{k-j-1} q_j.$$

Mit

$$\lim_{j \rightarrow \infty} q_j \left(\frac{r}{s}\right)^{k-j-1} \stackrel{(2.3)}{=} 0$$

erhält man die zu beweisende Konvergenz

$$q = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \left(\frac{s}{r}\right)^{j-k+1}.$$

□

„ \Leftarrow “

Sei nun andererseits mindestens ein Koeffizient nicht gemäß (2.4) gewählt, dann gibt es ein q_j , das (2.3) nicht genügt.

1.Fall: $q_j < 0$

Mit (2.2) erhält man

$$\begin{aligned} q_{j+1} &= \frac{r}{s}(q_j - a_j) &= \frac{r}{s}q_j - \frac{r}{s}a_j \\ q_{j+2} &= \frac{r}{s}(q_{j+1} - a_{j+1}) &= \left(\frac{r}{s}\right)^2 q_j - \left(\frac{r}{s}\right)^2 a_j - \left(\frac{r}{s}\right) a_{j+1} \\ &\vdots &\vdots \\ q_{j+i} &= \frac{r}{s}(q_{j+i-1} - a_{j+i-1}) &= \left(\frac{r}{s}\right)^i q_j - \underbrace{\left(\left(\frac{r}{s}\right)^i a_j + \cdots + \left(\frac{r}{s}\right) a_{j+i-1}\right)}_{\geq 0}. \end{aligned}$$

Es folgt

$$\left(\frac{r}{s}\right)^{k-(j+i)-1} q_{j+i} \leq \left(\frac{r}{s}\right)^{k-j-1} q_j < 0; \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

und somit

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \left(\frac{r}{s}\right)^{k-(j+i)-1} q_{j+i} \leq \left(\frac{r}{s}\right)^{k-j-1} q_j < 0,$$

das Restglied in (2.6) verschwindet hier somit nicht. Das bedeutet, daß die Entwicklung nicht gegen q konvergiert.

2. Fall: $q = \frac{r(r-1)}{r-s} + x; \quad x > 0$

Mit (2.2) erhält man

$$\begin{aligned} q_{j+1} &\geq \frac{r}{s} \left(\frac{r(r-1)}{r-s} + x - (r-1) \right) \\ &= \frac{r}{s} \left((r-1) \left(\frac{r}{r-s} - 1 \right) + x \right) = \frac{r}{s} \left(\frac{s(r-1)}{r-s} + x \right) \\ &= \frac{r(r-1)}{r-s} + \frac{r}{s} x \end{aligned}$$

und allgemein

$$q_{j+i} \geq \frac{r(r-1)}{r-s} + \left(\frac{r}{s} \right)^i x; \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

also

$$\left(\frac{r}{s} \right)^{k-(j+i)-1} q_{j+i} = \underbrace{\left(\frac{r}{s} \right)^{k-(j+i)-1} \frac{r(r-1)}{r-s}}_{\geq 0} + \left(\frac{r}{s} \right)^{k-j-1} x; \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

und

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \left(\frac{r}{s} \right)^{k-(j+i)-1} q_{j+i} \geq \left(\frac{r}{s} \right)^{k-j-1} x > 0; \text{ da } x > 0,$$

womit wie im Fall 1 die Nichtkonvergenz gegen q gezeigt ist.

□□□

Bemerkung 2.7

Genau für alle $k \in \mathbb{Z}$, die

$$(2.8) \quad 1 \leq \left(\frac{s}{r} \right)^{k-1} q \leq \frac{r(r-1)}{r-s}$$

erfüllen, gibt es mindestens eine $\frac{r}{s}$ -Komma-Entwicklung von $q \in \mathbb{R}^+$ der Form

$$a_0 a_1 \cdots a_{k-1}, a_k \cdots \text{ mit } a_0 \neq 0.$$

Beweis:

Aus

$$q \stackrel{r/s}{\sim} a_0 a_1 \cdots a_{k-1}, a_k \cdots$$

und

$$q_0 \stackrel{r/s}{\sim} a_0, a_1 a_2 \cdots$$

ergibt sich

$$q = \left(\frac{r}{s} \right)^{k-1} q_0.$$

Nach (2.4) gilt

$$a_0 \neq 0 \implies q_0 \geq 1$$

bzw.

$$(2.9) \quad 1 \leq q_0 = \left(\frac{s}{r}\right)^{k-1} q.$$

Weiter ist nach (2.4) $a_{-1} = 0$ genau für

$$(2.10) \quad q_{-1} = \left(\frac{s}{r}\right)^k q \leq \frac{(r-1)s}{r-s}$$

möglich.

Nach (2.9) und (2.10) gibt es eine $\frac{r}{s}$ -Komma-Entwicklung

$$q \stackrel{r/s}{\sim} a_0 a_1 \cdots a_{k-1}, a_k \cdots; \quad a_0 \neq 0$$

genau dann, wenn

$$1 \leq \left(\frac{s}{r}\right)^{k-1} q \leq \frac{(r-1)r}{r-s}$$

erfüllt ist.

□□□

Bemerkung 2.11

1. Für alle $q \in \mathbb{R}^+$ gibt es unendlich viele verschiedene $\frac{r}{s}$ -Entwicklungen.
2. Für $q = 0$ existiert nur eine $\frac{r}{s}$ -Komma-Entwicklung und zwar $0 \stackrel{r/s}{\sim} 0, \overline{0}$.

Beispiel:

Hier sollen nun einige $\frac{3}{2}$ -Komma-Entwicklungen (2.1) der Zahl 2 angegeben werden.

Nach (2.4) gilt für die Koeffizienten

$$(2.12) \quad a_j = \begin{cases} 0 & 0 \leq q_j < 1 \\ 0 \vee 1 & 1 \leq q_j < 2 \\ 0 \vee 1 \vee 2 & \text{für } 2 \leq q_j \leq 4 \\ 1 \vee 2 & 4 < q_j \leq 5 \\ 2 & 5 < q_j \leq 6. \end{cases}$$

Mit Bemerkung 2.7 erhält man die folgenden möglichen Anfangskoeffizienten für $q = 2$ und $\frac{r}{s} = \frac{3}{2}$:

Gleichung (2.8) lautet hier

$$1 \leq 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \leq \frac{(3-1) \cdot 3}{3-2} = 6$$

$$\frac{1}{2} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \leq 3.$$

Das ist genau für

$$-2 \leq k-1 \leq 1 \iff -1 \leq k \leq 2$$

erfüllt.

Es gibt also $\frac{3}{2}$ -Komma-Entwicklungen von 2 der Form

$$\begin{array}{cccc} a_0 & a_1 & , & a_2 & a_3 & \cdots \\ & a_0 & , & a_1 & a_2 & \cdots \\ & & 0 & , & a_0 & a_1 & \cdots \\ & & & 0 & , & 0 & a_0 & \cdots \end{array}$$

mit $a_0 \neq 0$.

Nun wird für jede mögliche Form ein Beispiel angegeben. Der ausgewählte Koeffizient wird dabei unterstrichen und zuerst angegeben.

1.) Für $k = 2$, also $2 = q \stackrel{3/2}{\sim} a_0 a_1, a_2 \cdots$ mit $a_0 \neq 0$ erhält man:

$$\begin{array}{llll} q_0 & = & \left(\frac{2}{3}\right) 2 = \frac{4}{3} & \stackrel{(2.12)}{\Rightarrow} \underline{a_0 = 1} \vee a_0 = 0 \\ q_1 & = & \frac{3}{2} \left(\frac{4}{3} - 1\right) = \frac{1}{2} & \Rightarrow \underline{a_1 = 0} \\ q_2 & = & \frac{3}{2} \left(\frac{1}{2} - 0\right) = \frac{3}{4} & \Rightarrow \underline{a_2 = 0} \\ q_3 & = & \frac{3}{2} \left(\frac{3}{4} - 0\right) = \frac{9}{8} & \Rightarrow \underline{a_3 = 0} \vee a_3 = 1 \\ q_4 & = & \frac{3}{2} \left(\frac{9}{8} - 0\right) = \frac{27}{16} & \Rightarrow \underline{a_4 = 0} \vee a_4 = 1 \\ q_5 & = & \frac{3}{2} \left(\frac{27}{16} - 0\right) = \frac{81}{32} & \Rightarrow \underline{a_5 = 1} \vee a_5 = 0 \vee a_5 = 2 \\ q_6 & = & \frac{3}{2} \left(\frac{81}{32} - 1\right) = \frac{147}{64} & \Rightarrow \underline{a_6 = 2} \vee a_6 = 0 \vee a_6 = 1 \\ q_7 & = & \frac{3}{2} \left(\frac{147}{64} - 2\right) = \frac{57}{128} & \Rightarrow \underline{a_7 = 0} \\ q_8 & = & \frac{3}{2} \left(\frac{57}{128} - 0\right) = \frac{171}{256} & \Rightarrow \underline{a_8 = 0} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \end{array}$$

$$\Rightarrow 2 \stackrel{3/2}{\sim} 10,0001200 \dots$$

2.) Für $k = 1$, also $2 = q = a_0, a_1 a_2 \dots$ mit $a_0 \neq 0$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} q_0 &= q = 2 && \Rightarrow \underline{a_0 = 2} \vee a_0 = 0 \vee a_0 = 1 \\ q_1 &= \frac{3}{2}(2 - 2) = 0 && \Rightarrow \underline{a_1 = 0} \\ q_2 &= \frac{3}{2}(0 - 0) = 0 && \Rightarrow \underline{a_2 = 0} \\ \vdots & && \vdots \end{aligned}$$

In diesem Fall lässt sich die Entwicklung sogar genau angeben, da für alle weiteren Koeffizienten $a_i, i = 1, 2, \dots, a_i = 0$ gilt, wenn $q_0 = 2$ gewählt wird. Es besteht dann keine andere Wahlmöglichkeit und man erhält:

$$2 \stackrel{3/2}{\sim} 2, \overline{0},$$

d.h. die – eindeutige – endliche $\frac{3}{2}$ -Ganzheitsentwicklung.

$$2 \stackrel{3/2}{\sim} 2.$$

3.) Für $k = 0$, also $2 = q = 0, a_0 a_1 \dots$ mit $a_0 \neq 0$ folgt:

$$\begin{aligned} q_0 &= \frac{2}{3} \cdot 2 = 3 && \Rightarrow \underline{a_0 = 1} \vee a_0 = 2 \vee a_0 = 0 \\ q_1 &= \frac{3}{2}(3 - 1) = 3 && \Rightarrow \underline{a_1 = 1} \vee a_1 = 0 \vee a_1 = 2 \\ q_2 &= \frac{3}{2}(3 - 1) = 3 && \Rightarrow \underline{a_2 = 1} \vee a_2 = 0 \vee a_2 = 2 \\ \vdots & && \vdots \end{aligned}$$

Auch hier lässt sich eine mögliche Entwicklung exakt angeben:

$$2 \stackrel{3/2}{\sim} 0, \overline{1},$$

es besteht aber jederzeit die Möglichkeit, nach endlich vielen 1 eine 0 oder 2 zu wählen.

4.) Für $k = -1$, also $2 = q = 0,0a_0a_1\cdots$ mit $a_0 \neq 0$ ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 q_0 &= \left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdot 2 = \frac{9}{2} && \Rightarrow \underline{a_0 = 2} \vee a_0 = 1 \\
 q_1 &= \frac{3}{2} \left(\frac{9}{2} - 2\right) = \frac{15}{4} && \Rightarrow \underline{a_1 = 0} \vee a_1 = 1 \vee a_1 = 2 \\
 q_2 &= \frac{3}{2} \left(\frac{15}{4} - 0\right) = \frac{45}{8} && \Rightarrow \underline{a_2 = 2} \\
 q_3 &= \frac{3}{2} \left(\frac{45}{8} - 2\right) = \frac{87}{16} && \Rightarrow \underline{a_3 = 2} \\
 q_4 &= \frac{3}{2} \left(\frac{87}{16} - 2\right) = \frac{165}{32} && \Rightarrow \underline{a_4 = 2} \\
 q_5 &= \frac{3}{2} \left(\frac{165}{32} - 2\right) = \frac{303}{64} && \Rightarrow \underline{a_5 = 1} \vee a_5 = 2 \\
 \vdots & && \vdots
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 2 \stackrel{3/2}{\sim} 0,0202221\dots$$

Bemerkung 2.13

Wenn man bei der $\frac{r}{s}$ -Komma-Entwicklung von a nach (2.4) immer die größtmöglichen a_j wählt, dann erhält man die in der Einleitung erwähnte **analytische Entwicklung**.

Kapitel 3

$\frac{r}{s}$ -Komma-Ganzheitsentwicklung

In diesem Kapitel werden die speziellen $\frac{r}{s}$ -Komma-Entwicklungen untersucht, die den Ganzheitsbedingungen (1.11) und (1.12) genügen. Zur anschaulichen Darstellung dieser Entwicklungen wird der $\frac{r}{s}$ -Komma-Wurzelbaum eingeführt.

3.1 Die $\frac{r}{s}$ -Komma-Ganzheitsentwicklung

Nach Bemerkung 2.11 gibt es jeweils unendlich viele $\frac{r}{s}$ -Komma-Entwicklungen für positive reelle Zahlen. Es soll im folgenden gezeigt werden, daß man aber eindeutige Entwicklungen erhalten kann, indem man fordert, daß die Ganzheitsbedingungen für alle Koeffizienten, also auch für die Koeffizienten nach dem Komma, erfüllt sein müssen.

Bezeichnung 3.1

Im folgenden werden $\frac{r}{s}$ -Komma-Entwicklungen, die den Ganzheitsbedingungen genügen, mit $\frac{r}{s}$ -**Komma-Ganzheitsentwicklungen** bezeichnet.

Definition 3.2

Eine Folge

$$\{a_j\} : a_0, a_1, a_2, \dots, a_j, \dots ; \quad a_j \in \{0, 1, \dots, r-1\}; \quad j \in \mathbb{N}_0$$

nennen wir eine $\frac{r}{s}$ -**Ganzheitsfolge**, wenn für alle $k \in \mathbb{N}_0$

$$n_{k+1} \stackrel{r/s}{\sim} a_0 \dots a_k$$

eine natürliche Zahl ist.

Satz 3.3

$\frac{r}{s}$ -Ganzheitsfolgen sind bei echt-gebrochenen Basen $\frac{r}{s} > 1$ nicht periodisch; Ausnahme ist die Entwicklung der Zahl 0, für die bezüglich jeder Basis $0 \stackrel{r/s}{\sim} 0, \overline{0}$ gilt.

Beweis¹:

O.B.d.A. können wir $a_0 > 0$ annehmen. Sei

$$\{a_j\} : a_0, a_1, \dots, a_q, \overline{a_{q+1}, \dots, a_{q+p}}; \quad a_0, p > 0$$

eine periodische $\frac{r}{s}$ -Ganzheitsfolge. Wir betrachten die ganzen Zahlen

$$n_{q+1} \sim a_0 \dots a_q, \quad n_{q+p+1} \sim a_0 \dots a_{q+p}.$$

Es gilt

$$n_{q+p+1} = \left(\frac{r}{s}\right)^p n_{q+1} + \left(\left(\frac{r}{s}\right)^{p-1} a_{q+1} + \left(\frac{r}{s}\right)^{p-2} a_{q+2} + \dots + \left(\frac{r}{s}\right) a_{q+p-1} + a_{q+p}\right).$$

Hierin liefert die Klammer eine rationale Zahl $\frac{N}{s^{p-1}}$, wobei $N \in \mathbb{N}_0$ nur von der Periode abhängt. Aus

$$n_{q+p+1} = \left(\frac{r}{s}\right)^p n_{q+1} + \frac{N}{s^{p-1}}$$

folgt

$$r^p n_{q+1} + sN = s^p n_{q+p+1} \equiv 0 \pmod{s^p}.$$

Wählt man anstelle der einfachen Periode die t -fache Periode der Länge tp , mit der nur von t und der Periode abhängigen Zahl $N^{(t)} \in \mathbb{N}_0$, so ergibt sich allgemeiner

$$r^{tp} n_{q+1} + sN^{(t)} \equiv 0 \pmod{s^{tp}}; \quad t \in \mathbb{N}.$$

Startet man dieselbe Überlegung mit n_{q+p+1} anstelle von n_{q+1} , so erhält man

$$r^{tp} n_{q+p+1} + sN^{(t)} \equiv 0 \pmod{s^{tp}}; \quad t \in \mathbb{N}$$

mit derselben, nur von t und der Periode abhängigen Zahl $N^{(t)}$.

Die Subtraktion dieser beiden Kongruenzen ergibt

$$r^{tp}(n_{q+p+1} - n_{q+1}) \equiv 0 \pmod{s^{tp}}; \quad t \in \mathbb{N}$$

¹Dieses ist ein nichtveröffentlichter Beweis von K.Burde.

und wegen $\text{ggT}(r, s) = 1$ schließlich

$$n_{q+p+1} - n_{q+1} \equiv 0 \pmod{s^{tp}}; \quad t \in \mathbb{N}.$$

Die Differenz $(n_{q+p+1} - n_{q+1})$ muß also durch beliebig hohe Potenzen von $s > 1$ teilbar sein, d.h. sie ist gleich Null und somit $n_{q+p+1} = n_{q+1}$, was der Voraussetzung $a_0, p > 0$ wegen der lexikographischen Anordnung widerspricht. $\square\square\square$

Aus Satz 3.3 ergibt sich nun auch, daß außer für die Zahl 0 keine Nullperiode auftritt und somit folgt:

Korollar 3.4

Für alle darstellbaren Zahlen $q \in \mathbb{R}^+$, also auch die natürlichen Zahlen, sind die $\frac{r}{s}$ -Komma-Ganzheitsentwicklungen unendlich.

Daraus folgt, daß die $\frac{r}{s}$ -Komma-Ganzheitsentwicklungen stets den totalen Ganzheitsbedingungen genügen.

3.2 Der $\frac{r}{s}$ -Wurzelkommabaum

Im $\frac{r}{s}$ -Wurzelbaum $B_{\frac{r}{s}}$ besitzt der Knoten in der n -ten Ebene, der mit der Wurzel durch den $(0, n)$ -Weg $w(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$ verbunden ist, als Koeffizient die durch die Kantenkoeffizientenfolge dargestellte natürliche Zahl

$$a \stackrel{r/s}{\sim} a_0 \cdots a_{n-1} \in \mathbb{N}_0.$$

Um anhand des Baumes auch unendliche $\frac{r}{s}$ -Komma-Ganzheitsentwicklungen veranschaulichen zu können, ordnet man nun diesem Knoten mit einem beliebig gewählten aber festen $k \in \mathbb{N}_0$ als Koeffizienten die Zahl

$$(3.5) \quad a^{(k)} \stackrel{r/s}{\sim} a_0 \cdots a_{k-1}, a_k \cdots a_{n-1}$$

zu, d.h. man zieht zwischen der $(k-1)$ -ten und der k -ten Ebene von $B_{\frac{r}{s}}$ gewissermaßen eine **Komma-Ebene**.

Der Baum mit dieser Komma-Ebene wird mit $B_{\frac{r}{s}}^k$ und seine n -te Ebene mit $B_{\frac{r}{s}}^k(n)$ bezeichnet. Jeder Unterbaum von $B_{\frac{r}{s}}^k$ wird mit $UB_{\frac{r}{s}}^k$ und die n -te Ebene dieses Unterbaums mit $UB_{\frac{r}{s}}^k(n)$ bezeichnet.

Man erhält den ursprünglichen Baum offenbar, indem man diese Komma-Ebene nach Unendlich verschiebt, was durch die Bezeichnung

$$B_{\frac{r}{s}} = B_{\frac{r}{s}}^\infty$$

ausgedrückt sei.

3.3 Weitere Eigenschaften der Entwicklungen und des Baumes

Die positive **Differenz** der Koeffizienten von zwei benachbarten Knoten aus $UB_{\frac{r}{s}}^k(n)$ sei mit

$$D(UB_{\frac{r}{s}}^k(n)); \quad n \in \mathbb{N}$$

bezeichnet. Im Baum $B_{\frac{r}{s}}^k$ gilt für alle diese Differenzen

$$(3.6) \quad D(B_{\frac{r}{s}}^k(n)) = s; \quad n \in \mathbb{N}.$$

Das ändert sich jedoch für die Wurzelkommabäume.

Nach (3.5) gilt

$$(3.7) \quad D(B_{\frac{r}{s}}^k(n)) = \begin{cases} s & ; \quad n < k \\ s \left(\frac{s}{r}\right)^{n-k+1} & ; \quad n \geq k. \end{cases}$$

Wenn die Wurzel von $UB_{\frac{r}{s}}^k(n)$ in $B_{\frac{r}{s}}^k(n_0)$ liegt, was in Zukunft mit

$$U_{n_0}B_{\frac{r}{s}}^k(n)$$

bezeichnet wird, ergibt sich allgemeiner

$$D(U_{n_0}B_{\frac{r}{s}}^k(n - n_0)) = D(B_{\frac{r}{s}}^k(n)); \quad n > n_0$$

und weiter

$$(3.8) \quad D(U_{n_0}B_{\frac{r}{s}}^k(n)) = D(B_{\frac{r}{s}}^k(n_0 + n)) = \begin{cases} s & ; \quad n_0 + n < k \\ s \left(\frac{s}{r}\right)^{n_0+n-k+1} & ; \quad n_0 + n \geq k. \end{cases}$$

Beispiel:

Als Beispiel sind in Abbildung 3.1 die ersten drei Ebenen des Wurzelkommabaumes $B_{\frac{3}{2}}^k$ dargestellt.

Nun läßt sich die folgende Aussage über die Knotenanzahl beweisen:

Satz 3.9

Gilt $r \geq 2s - 1$, so wird die Knotenanzahl $A(UB_{\frac{r}{s}}^k(n))$ eines beliebigen Unterbaumes für hinreichend große n beliebig groß, insbesondere existiert stets ein $n_0 \in \mathbb{N}_0$ mit

$$A(UB_{\frac{r}{s}}^k(n)) > \frac{(s-1)r}{r-s}; \quad n > n_0.$$

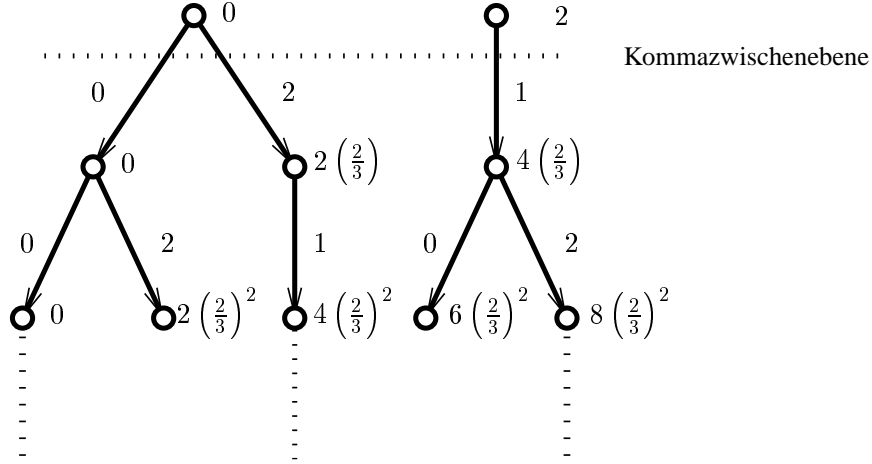


Abbildung 3.1: Ausschnitt aus dem Wurzelkommaabbaum $B_{\frac{3}{2}}^k$ zur Basis $\frac{3}{2}$ für 3 Ebenen

Beweis:

Von jedem Knoten gehen nach Bemerkung 1.31 $\left[\frac{r}{s}\right]_{\downarrow}$ oder $\left[\frac{r}{s}\right]_{\uparrow}$ Kanten aus, im Fall $r \geq 2s$ also mindestens zwei. Die Knotenanzahl verdoppelt sich also mindestens von Ebene zu Ebene, woraus obige Aussage folgt. \square

Im Fall $r = 2s - 1$ gibt es nach Bemerkung 1.30 unter s aufeinanderfolgenden Kanten einer Ebene genau einen Knoten, von dem nur eine Kante ausgeht. Daraus folgt (siehe oben), daß die Knotenanzahl $A(UB_{\frac{r}{s}}^k(n))$ beliebig groß wird, wenn sie in einer Ebene nur mindestens 2 ist.

Es bleibt demnach zu zeigen, daß es keine **linearen** Unterbäume $UB_{\frac{r}{s}}^k$ gibt, d.h. solche mit

$$\forall n : A(UB_{\frac{r}{s}}^k(n)) = 1.$$

Nach (1.29) gibt es im Fall $r = 2s - 1$ ein $t_0 \in \mathbb{N}$, so daß genau von den Knoten einer Ebene nur eine Kante ausgeht, für deren Koeffizient $s \cdot t$ mit $t \equiv t_0 \pmod{s}$ gilt, wobei der Koeffizient dieser Kante dann stets die durch (1.29) mit $t \equiv t_0 \pmod{s}$ eindeutig bestimmte Zahl a_0 ist.

Die Existenz eines solchen linearen Unterbaumes wäre somit gleichbedeutend mit der Existenz einer $\frac{r}{s}$ -Komma-Ganzheitsentwicklung, welche – nach einer gewissen Vorperiode – die Periode $\overline{a_0}$ besäße. Nach Satz 3.3 gibt es keine solche Periode und somit auch keinen linearen Unterbaum.

Die Abschätzung ergibt sich somit für ein hinreichend großes n_0 .

$\square\square\square$

Bemerkung 3.10

1. Da jeder Baum $B_{\frac{r}{s}}^k$ an der Wurzel verzweigt ist, also die Knotenanzahl 2 besitzt, erreicht er nach obigem Beweis auch jede gewünschte Knotenanzahl.
2. Allgemeiner gilt Satz 3.9, wie man dem Beweis leicht entnimmt, für alle $UB_{\frac{r}{s}}^k$, wenn es keine linearen Unterbäume $UB_{\frac{r}{s}}^k$ gibt.

Nach (3.7) besitzen in dem Wurzelkommabaum $B_{\frac{r}{s}}^k$ die Koeffizienten von zwei benachbarten Knoten in den Ebenen nach dem Komma die Differenz

$$D(B_{\frac{r}{s}}^k(n)) = s \left(\frac{s}{r}\right)^{n-k+1}. \text{ Damit erhält man:}$$

Hilfssatz 3.11

Für $\frac{r}{s}$ -Entwicklungen

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j \left(\frac{s}{r}\right)^{j+1-k} \underset{r/s}{\sim} a_0 \cdots a_{k-1}, a_k \cdots$$

gilt

$$0 \leq \sum_{j=n}^{\infty} a_j \left(\frac{s}{r}\right)^{j+1-k} \stackrel{(<)}{=} \frac{(r-1)s}{r-s} \left(\frac{s}{r}\right)^{n-k} = \frac{r-1}{r-s} D(B_{\frac{r}{s}}^k(n-1))$$

mit $n = k, k+1, \dots$, wobei das rechte Gleichheitszeichen der Ungleichung bei Ganzheitsentwicklungen nicht angenommen wird.

Bezeichnung 3.12

Der Wert $\frac{r-1}{r-s} D(B_{\frac{r}{s}}^k(n-1))$ wird mit **maximaler Rest** bezeichnet.

Beweis:

Da Ganzheitsentwicklungen nicht periodisch werden, das rechte Gleichheitszeichen aber nur angenommen wird, wenn alle $a_j = r-1$ sind, folgt die letzte Aussage des Satzes.

□□□

Definition 3.13

Ist $I(n)$ der größte und $i(n)$ der kleinste Koeffizient, der zu einem Knoten von $UB_{\frac{r}{s}}^k(n)$ gehört, so wird die Differenz $I(n) - i(n)$ als die **Breite** von $UB_{\frac{r}{s}}^k(n)$ bezeichnet:

$$B(UB_{\frac{r}{s}}^k(n)) = I(n) - i(n).$$

Satz 3.14

Für alle vollständigen Bäume $B_{\frac{r}{s}}^k$ und für alle Unterbäume $UB_{\frac{r}{s}}^k$ mit $r \geq 2s - 1$ gilt für alle hinreichend großen $n \in \mathbb{N}$

1. $B(UB_{\frac{r}{s}}^k(n)) > \delta$
2. $B(UB_{\frac{r}{s}}^k(n)) > M$ für $k \geq k^*(M)$

mit jeweils passendem $\delta > 0$ und beliebig vorgegebenem $M > 0$.

Beweis:

Nach Satz 3.9 bzw. der daraus folgenden Bemerkung 3.10 für volle Bäume gibt es zu beliebig vorgegebenem $C > 0$ ein $n^* = n^*(C) \in \mathbb{N}$ mit

$$A(UB_{\frac{r}{s}}^k(n^*)) > \frac{(s-1)r}{r-s} + 1 + C; \quad k \in \mathbb{N},$$

also gilt nach Bemerkung 1.35 und (1.34)

$$\begin{aligned} A(UB_{\frac{r}{s}}^k(n)) &> \left(\frac{r}{s}\right)^{n-n^*} (1+C) \\ &\geq 1 + \left(\frac{r}{s}\right)^{n-n^*} C; \quad n \geq n^*, k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Hieraus erhält man zusammen mit (3.8) für die entsprechende Breite

$$\begin{aligned} B(U_{n_0} B_{\frac{r}{s}}^k(n)) &= (A(UB_{\frac{r}{s}}^k(n)) - 1) \cdot D(U_{n_0} B_{\frac{r}{s}}^k(n)) \\ &\stackrel{(3.8)}{\geq} \left(\frac{r}{s}\right)^{n-n^*} \cdot C \cdot s \cdot \left(\frac{s}{r}\right)^{n_0+n-k+1} \\ &= C \cdot s \left(\frac{r}{s}\right)^{k-n^*-n_0-1} \\ &= \delta(k) > 0; \quad n \geq n^*, k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Daraus folgt 1.

Für hinreichend großes k , also $k \geq k^*(M)$ folgt auch 2.

□□□

3.4 Existenz und Eindeutigkeit der $\frac{r}{s}$ -Komma-Ganzheitsentwicklungen

Bevor die Existenz und die Eindeutigkeit der $\frac{r}{s}$ -Komma-Ganzheitsentwicklungen aller positiver reeller Zahlen nachgewiesen werden kann, wird vorerst noch folgender Satz benötigt:

Satz 3.15

Die durch $\frac{r}{s}$ -Komma-Ganzheitsentwicklungen darstellbaren Zahlen liegen dicht in \mathbb{R}^+ .

Beweis:

Zu zeigen ist, daß für beliebig vorgegebene $\varepsilon > 0$ in jedem Intervall der Länge ε von \mathbb{R}^+ eine darstellbare Zahl liegt.

Zu vorgegebener Schranke $M > 0$ gibt es nach Satz 3.14 (2) ein $n^* \in \mathbb{N}$ und ein $k \in \mathbb{N}$ mit

$$(3.16) \quad B(B_{\frac{r}{s}}^k(n)) > M; \quad n \geq n^*.$$

Die durch die in diesem Baum $B_{\frac{r}{s}}^k$ entsprechenden $\frac{r}{s}$ -Komma-Ganzheitsentwicklungen

$$a_0 \cdots a_{k-1}, a_k a_{k+1} \cdots; \quad a_0 \neq 0$$

darstellbaren Zahlen q werden für jedes $n > (k-1)$ wie folgt zerlegt:

$$(3.17) \quad q = q_n^* + q_n^{**}, \begin{cases} q_n^* & \sim a_0 \cdots a_{k-1}, & a_k & \cdots & a_{n-1} & 0 & \cdots \\ q_n^{**} & \sim & 0, & 0 & \cdots & 0 & a_n & a_{n+1} & \cdots \end{cases}$$

Es gilt dann nach Hilfssatz 3.11

$$0 \leq q_n^{**} \leq \frac{(r-1)s}{r-s} \left(\frac{s}{r}\right)^{n-k},$$

also

$$(3.18) \quad 0 \leq q_n^{**} < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für} \quad n > n^{**}(\varepsilon).$$

Die q_n^* sind die Koeffizienten der Knoten von $B_{\frac{r}{s}}^k(n)$. Der kleinste von ihnen ist hier $i(n) = 0$ und der größte somit

$$I(n) = I(n) - i(n) = B(B_{\frac{r}{s}}^k(n)) \stackrel{(3.16)}{>} M; \quad n \geq n^*.$$

Weiter ist die Differenz der Koeffizienten von zwei benachbarten Knoten in dieser Ebene

$$D(B_{\frac{r}{s}}^k(n)) \stackrel{(3.7)}{=} s \cdot \left(\frac{s}{r}\right)^{n-k+1}; \quad n > (k-1),$$

somit für $n > n^*(\varepsilon) > (k-1)$ kleiner als $\frac{\varepsilon}{2}$.

Sei nun

$$n > \max\{(k-1), n^*, n^*(\varepsilon), n^{**}(\varepsilon)\}$$

und $[\rho, \rho + \varepsilon]$ ein beliebiges Teilintervall von $[0, M]$.

Dann liegt nach obigem im Unterintervall $[\rho, \rho + \frac{\varepsilon}{2}]$ mindestens ein Knotenkoeffizient q_n^* . Ist q die zugehörige darstellbare Zahl

$$q = q_n^* + q_n^{**},$$

so liegt q nach (3.18) im Intervall $[\rho, \rho + \varepsilon]$, das heißt aber, daß die darstellbaren Zahlen dicht in $[0, M]$ liegen. Da $M > 0$ beliebig wählbar ist, liegen sie auch dicht in \mathbb{R}^+ .

□□□

Satz 3.19

Jede positive reelle Zahl $q \in \mathbb{R}^+$ besitzt eine $\frac{r}{s}$ -Komma-Ganzheitsdarstellung.

Beweis:

Nach Satz 3.15 gibt es eine Folge darstellbarer Zahlen $q^{(m)}$, die gegen q konvergiert:

$$(3.20) \quad q = \lim_{m \rightarrow \infty} q^{(m)}, \quad q^{(m)} \stackrel{r/s}{\sim} a_0^{(m)} \cdots a_{k(m)-1}^{(m)}, a_{k(m)}^{(m)} \cdots; \quad a_0^{(m)} \neq 0.$$

Man kann nun etwa

$$(0 <) \frac{q}{2} < q^{(m)} < 2q (< \infty)$$

annehmen. Es folgt die Existenz eines $k \in \mathbb{N}$ mit

$$k(m) \leq k; \quad m \in \mathbb{N},$$

somit gibt es ein $k \in \mathbb{Z}$, so daß für eine ganze – ebenfalls gegen q konvergierende – Teilfolge der $q^{(m)}$ gilt: $k(m) = k$.

O.B.d.A. sei $(q^{(m)})_m$ bereits diese Teilfolge. Man hat dann also mit einem festen k für alle $m \in \mathbb{N}$ Folgenglieder

$$q^{(m)} \stackrel{r/s}{\sim} a_0^{(m)} \cdots a_{k-1}^{(m)}, a_k^{(m)} \cdots$$

Seien $w^{(m)}$ die den Entwicklungen der $q^{(m)}$ entsprechenden Wege im $\frac{r}{s}$ -Wurzelkommabaum $B_{\frac{r}{s}}^k$. Da von der Wurzel dieses Baumes $\left[\frac{r}{s}\right]^\uparrow$ Kanten, also nur endlich viele, ausgehen, verlaufen unendlich viele dieser Wege $w^{(m)}$ längs eines Wegstückes w_1 – von mindestens einer Kantenlänge – gemeinsam bis zu einem Knoten. Von diesem gibt es wieder höchstens $\left[\frac{r}{s}\right]^\uparrow$, also nur endlich viele Fortsetzungsmöglichkeiten, so daß wieder unendlich viele dieser $w^{(m)}$ ein weiteres Wegstück w_2 gemeinsam haben, und so weiter.

So fortfahrend erhält man einen sich aus den Wegstücken w_1, w_2, \dots zusammensetzenden unendlichen Weg $w(a_0, a_1, \dots) = w^*$, so daß jedem endlichen Teilstück dieses Weges unendlich viele Wege $w^{(m)}$ folgen.

Sei nun

$$q^* = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \left(\frac{s}{r}\right)^{j+k-1} \stackrel{r/s}{\sim} a_0 a_1 \cdots a_{k-1}, a_k \cdots$$

die Zahl, die durch die zu w^* gehörige $\frac{r}{s}$ -Komma-Ganzheitsentwicklung dargestellt wird.

Es wird nun $q = q^*$ gezeigt, womit der Satz bewiesen ist.

Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ existieren unendlich viele $m \in \mathbb{N}$, so daß der Weg $w^{(m)}$ dem Weg w^* bis zur Ebene $B_{\frac{r}{s}}^k(n)$ folgt. Für diese unendlich vielen m gilt also

$$a_j^{(m)} = a_j \text{ für } j = 0, \dots, n-1.$$

Damit erhält man für die entsprechenden $q^{(m)}$

$$\begin{aligned} |q^* - q^{(m)}| &= \left| \sum_{j=0}^{\infty} a_j \left(\frac{s}{r}\right)^{j+1-k} - \sum_{j=0}^{\infty} a_j^{(m)} \left(\frac{s}{r}\right)^{j+1-k} \right| \\ &= \left| \sum_{j=n}^{\infty} a_j \left(\frac{s}{r}\right)^{j+1-k} - \sum_{j=n}^{\infty} a_j^{(m)} \left(\frac{s}{r}\right)^{j+1-k} \right| \end{aligned}$$

und weiter nach (3.11) für hinreichend große n

$$(3.21) \quad |q^* - q^{(m)}| < \frac{\varepsilon}{2}; \quad n > n^*.$$

Ferner gilt nach (3.20) für hinreichend großes m

$$(3.22) \quad |q^{(m)} - q| < \frac{\varepsilon}{2}; \quad m > m^*.$$

Nach obigem gibt es nun ein $m > m^*$, das zu einem $n > n^*$ gehört. Für das entsprechende $q^{(m)}$ gelten dann (3.21) und (3.22), das heißt

$$|q^* - q| \leq |q^* - q^{(m)}| + |q^{(m)} - q| < \varepsilon,$$

und da dies für jedes $\varepsilon > 0$ gilt, folgt

$$q = q^*.$$

□□□

Definition 3.23

Zwei Entwicklungen heißen **benachbart**, wenn für alle n in jeder Ebene $B_{\frac{r}{s}}^k(n)$ kein Knoten zwischen den Knoten der Entwicklungen liegt.

Satz 3.24

1. Zwei benachbarte $\frac{r}{s}$ -Komma-Ganzheitsentwicklungen stellen dieselbe Zahl dar.

2. Für $r \geq 2s - 1$ stellen zwei nicht benachbarte $\frac{r}{s}$ -Komma-Ganzheitsentwicklungen verschiedene Zahlen dar.

Beweis:

Seien²

$$q \stackrel{r/s}{\sim} a_0 \cdots a_{k-1}, a_k \cdots; \quad a_0 \neq 0$$

$$\tilde{q} \stackrel{r/s}{\sim} \tilde{a}_0 \cdots \tilde{a}_{k-1}, \tilde{a}_k \cdots$$

zwei durch $\frac{r}{s}$ -Komma-Ganzheitsentwicklungen dargestellte Zahlen. Nun wird wieder die Aufspaltung dieser Zahlen aus (3.17) benutzt

$$q = q_n^* + q_n^{**} \quad ; \quad n \geq k$$

$$\tilde{q} = \tilde{q}_n^* + \tilde{q}_n^{**},$$

wobei q_n^* bzw. \tilde{q}_n^* die Koeffizienten der Knoten aus $B_{\frac{r}{s}}^k(n)$ sind, durch welche die entsprechenden Entwicklungswege w bzw. \tilde{w} laufen.

Zu 1.:

Sind die beiden Entwicklungen benachbart, somit auch alle q_n^*, \tilde{q}_n^* Koeffizienten benachbarter Knoten, so gilt

$$|q_n^* - \tilde{q}_n^*| = D(B_{\frac{r}{s}}^k(n)) \stackrel{(3.7)}{=} s \left(\frac{r}{s} \right)^{n-k+1} ; \quad n \geq k.$$

Zu $\varepsilon > 0$ existiert also ein $n^*(\varepsilon)$ mit

$$|q_n^* - \tilde{q}_n^*| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{für} \quad n > n^*(\varepsilon).$$

Weiter gilt nach dem Beweis zu Satz 3.15

$$|q_n^{**}|, |\tilde{q}_n^{**}| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{für} \quad n > n^{**}(\varepsilon),$$

also mit einem $n > \max\{(k-1), n^*(\varepsilon), n^{**}(\varepsilon)\}$

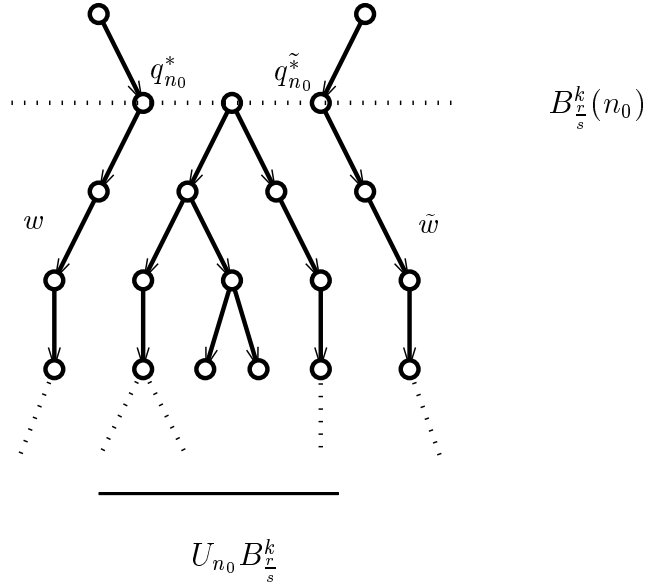
$$|q - \tilde{q}| \leq |q_n^* - \tilde{q}_n^*| + |q_n^{**}| + |\tilde{q}_n^{**}| < \varepsilon$$

für beliebiges $\varepsilon > 0$. Daraus folgt

$$\tilde{q} = q.$$

□

²Hier kann $\tilde{a}_0 = 0$ sein.

**Abbildung 3.2:** Nicht benachbarte Entwicklungen w und \tilde{w}

Zu 2.:

Seien nun die Entwicklungen von q und \tilde{q} nicht benachbart. Dann gibt es in einer gewissen Ebene $B_{r/s}^k(n_0)$ einen Knoten der „zwischen“ den – nicht benachbarten – Knoten mit den Koeffizienten $q_{n_0}^*, \tilde{q}_{n_0}^*$ dieser Ebene liegt (siehe Abbildung 3.2).

Der Unterbaum $U_{n_0} B_{r/s}^k$ liegt dann „zwischen“ den beiden Entwicklungswegen w und \tilde{w} . Mit Satz 3.14 gilt im Fall $r \geq 2s - 1$ mit einem $\delta > 0$ für alle hinreichend großen $n \in \mathbb{N}$

$$B(U_{n_0} B_{r/s}^k) > \delta,$$

somit

$$|q_n^* - \tilde{q}_n^*| > \delta; \quad n > n^*;$$

und weiter (vgl. Beweis von Satz 3.24 1.)

$$|q_n^{**}|, |\tilde{q}_n^{**}| < \frac{\delta}{3}; \quad n > n^{**}.$$

Mit $n > \max\{n^*, n^{**}\}$ folgt schließlich

$$|q - \tilde{q}| \geq |q_n^* - \tilde{q}_n^*| - |q_n^{**}| - |\tilde{q}_n^{**}| > \frac{\delta}{3} > 0,$$

also

$$\tilde{q} \neq q.$$

□□□

Bemerkung 3.25

Wie bereits in Bemerkung 1.31 und im Beweis zu Satz 3.9 gezeigt, gibt es für $r \geq 2s - 1$ keine linearen Unterbäume.

Vermutung 3.26

Es gibt auch für $r < 2s - 1$ keine linearen Unterbäume.

Unter dieser Vermutung gilt Satz 3.9 – vergleiche Bemerkung 3.10 (2) – und damit auch Satz 3.14 für alle Unterbäume $UB_{\frac{r}{s}}^k$. Es folgt, daß auch Satz 3.24 (2) allgemein ohne die Einschränkung $r \geq 2s - 1$ gilt.

Nach Satz 3.24 gibt es reelle Zahlen, die zwei verschiedene – benachbarte – $\frac{r}{s}$ -Komma-Ganzheitsentwicklungen besitzen.

Satz 3.27

Besitzt eine reelle Zahl genau zwei verschiedene $\frac{r}{s}$ -Komma-Ganzheitsentwicklungen, so sind diese benachbart.

Beweis:

Wären die beiden verschiedenen Entwicklungen der Zahl q nicht benachbart, so läge ein Unterbaum $U_{n_0} B_{\frac{r}{s}}^k$ zwischen den beiden Entwicklungswegen (siehe dazu den Beweis des Satzes 3.24 (2)).

Alle Entwicklungen, deren Wege ab der Ebene $B_{\frac{r}{s}}^k(n_0)$ innerhalb dieses Unterbaumes verlaufen, und das ist mindestens einer, sind dann nach dem Beweis zu Satz 3.24 (1) ebenfalls $\frac{r}{s}$ -Komma-Ganzheitsentwicklungen von q , und q hätte somit mehr als zwei verschiedene solcher Entwicklungen.

□□□

Definition 3.28

Eine reelle Zahl q , die genau zwei – dann benachbarte – $\frac{r}{s}$ -Komma-Ganzheitsentwicklungen besitzt, wird **ambig**, genauer $\frac{r}{s}$ -**ambig** genannt.

Die Entwicklung, deren zugehöriger Weg im Baum rechts verläuft wird **Oberentwicklung**, die andere **Unterentwicklung** von q genannt.

Modulo der obigen Vermutung 3.26 besitzt eine (reelle) Zahl $q \in \mathbb{R}^+$ entweder genau eine $\frac{r}{s}$ -Komma-Ganzheitsentwicklung oder sie ist $\frac{r}{s}$ -ambig.

Trifft die Vermutung 3.26 jedoch nicht zu, so gibt es auch **überambige** Zahlen mit mehr als zwei verschiedenen $\frac{r}{s}$ -Komma-Ganzheitsentwicklungen.

Welche Möglichkeiten hier bestehen, wird später noch diskutiert.

Bemerkung 3.29

Falls überambige Zahlen existieren, also die Vermutung 3.26 nicht richtig ist, sei die Oberentwicklung die, die von allen Entwicklungen für eine Zahl im Baum am weitesten rechts verläuft.

Die Unterentwicklung sei dann die, die im Baum am weitesten links verläuft.

Beispiel:

1.) Bezüglich der 10-er Basis ist die Zahl 1 eine ambige Zahl, wobei

$$\begin{array}{ll} 1, \overline{0} & \text{die ambige Oberentwicklung und} \\ 0, \overline{9} & \text{die ambige Unterentwicklung ist.} \end{array}$$

2.) Im $\frac{3}{2}$ -System haben die ambigen Zahlen folgende Darstellungen:

$$\begin{array}{llllll} \cdots 2 & a_j & a_{j+1} & \cdots & \text{ambige Oberentwicklung und} \\ \cdots 0 & (a_j + 1) & (a_{j+1} + 1) & \cdots & \text{ambige Unterentwicklung.} \end{array}$$

Bezeichnung 3.30

Der letzte gemeinsame Knoten der ambigen Ober- und Unterentwicklungen einer Zahl wird mit **A-Wurzel** bezeichnet.

Bemerkung 3.31

1. Überambige Zahlen existieren genau dann, wenn es lineare Unterbäume gibt, nach Bemerkung 3.25 also höchstens für $r < 2s - 1$ (und nach der Vermutung 3.26 überhaupt nicht).
2. Im Fall $r < 2s - 1$, also $\left\lfloor \frac{r}{s} \right\rfloor = 1$, treten nach Bemerkung 1.31 nur 1-Knoten und 2-Knoten auf, und zu jedem 2-Knoten gehört dann eine ambige oder eine überambige Zahl mit diesem Knoten als A-Wurzel (siehe Abbildung 3.4).
3. Gibt es keine überambigen Zahlen, so gehören zu jedem m -Knoten genau $(m-1)$ ambige Zahlen mit diesem Knoten als Wurzel (siehe Abbildung 3.3). Für $m > 2$ ist die Voraussetzung nach 2. stets erfüllt.

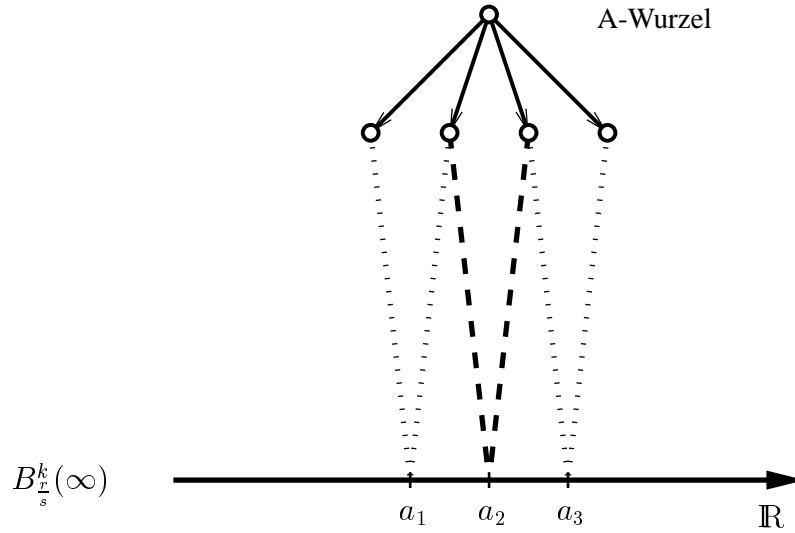
Satz 3.32

Sei $r \geq 2s - 1$. Liegt dann die A-Wurzel einer ambigen Zahl q in der j -ten Ebene, so gilt für die Koeffizienten a_i ihrer Oberentwicklung

$$a_i \leq (s - 1) \quad \text{für } i > j$$

und ihrer Unterentwicklung

$$a_i \geq (r - s) \quad \text{für } i > j.$$

Abbildung 3.3: Wurzelbaum für $r \geq 2s - 1$ **Beweis:**

Nach dem in Kapitel 1.4 beschriebenen Aufbau des Wurzelbaumes B_s^k gehen vom t -ten Knoten jeder Ebene Kanten mit den Koeffizienten $a = a_i$ aus, die (1.29)

$$\begin{cases} a \equiv -r(t-1) \pmod{s} \\ 0 \leq a < r \end{cases}$$

erfüllen, wobei der kleinste bzw. größte dieser Koeffizienten zu der Kante ganz links bzw. ganz rechts gehört.

Gibt es keine linearen Unterbäume, was nach Bemerkung 1.31 für $r \geq 2s - 1$ der Fall ist, so besteht die Ober- bzw. Unterentwicklung von q ab der Ebene $B_s^k(j+1)$ aus den Koeffizienten a_i , die jeweils zu einer ganz linken bzw. ganz rechten Kante gehören. Daraus folgt mit (1.29) die Aussage des Satzes.

□□□

Beispiel:

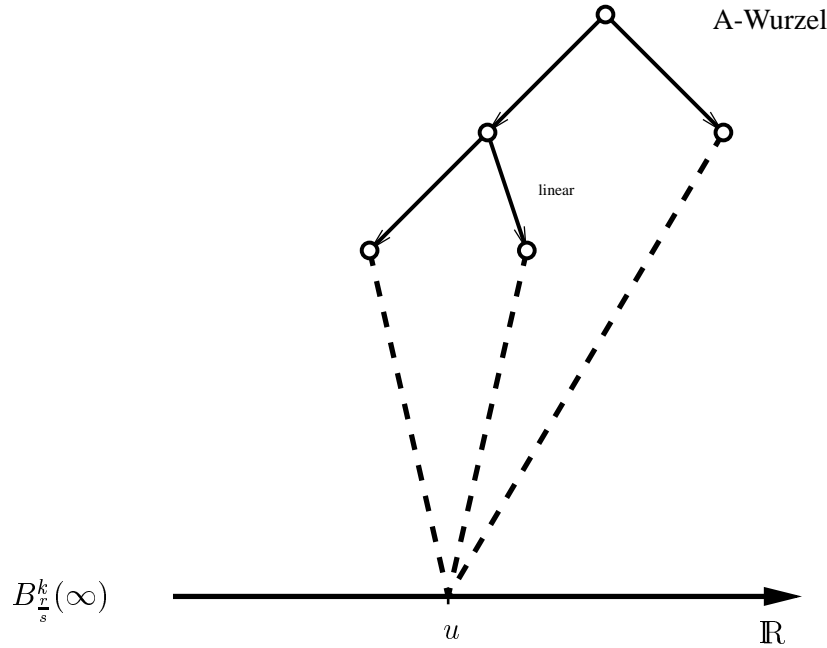
Abbildung 3.3 zeigt die Darstellung von drei ambigen Zahlen a_1, a_2, a_3 .

Abbildung 3.4 zeigt die Darstellung von einer überambigen Zahl u .

Sieht man zwei benachbarte $\frac{r}{s}$ -Komma-Ganzheitsentwicklungen, die also dieselbe reelle Zahl darstellen, als „lexikographisch gleich“ an, so gilt:

Satz 3.33

Die durch ihre $\frac{r}{s}$ -Komma-Ganzheitsentwicklung gegebene lexikographische An-

Abbildung 3.4: Wurzelbaum für $r < 2s - 1$

ordnung der nicht negativen reellen Zahlen stimmt mit ihrer natürlichen Anordnung überein.

Beweis:

Seien

$$\begin{aligned} a &\stackrel{r/s}{\sim} a_0 a_1 \cdots a_{k-1}, a_k \cdots \\ b &\stackrel{r/s}{\sim} b_0 b_1 \cdots b_{k-1}, b_k \cdots \end{aligned}$$

nicht negative reelle Zahlen und o.B.d.A. $a < b$. Nach obiger Vereinbarung bleibt zu zeigen, daß dann die $\frac{r}{s}$ -Komma-Ganzheitsentwicklung von a lexikographisch kleiner als die von b ist:

$$a \stackrel{r/s}{<} b.$$

Da sich die zu a bzw. b gehörigen verschiedenen Entwicklungswege im Baum $B_{r/s}^k$ nicht kreuzen, liegt der Entwicklungsweg von b ab einer gewissen Ebene $B_{r/s}^k(n_0)$ rechts des Entwicklungsweges von a . Daraus folgt für die Knotenkoeffizienten der Entwicklungswege zu a bzw. b in der Ebene $B_{r/s}^k(n)$

$$a^{(n)} \stackrel{r/s}{\sim} a_0 \cdots a_{k-1}, a_k \cdots a_n \bar{0}$$

bzw.

$$b^{(n)} \stackrel{r/s}{\sim} b_0 \cdots b_{k-1}, b_k \cdots b_n \bar{0}$$

$$a^{(n)} < b^{(n)} \quad \text{für } n > n_0,$$

somit nach Satz 1.15 auch

$$a^{(n)} \stackrel{r/s}{<} b^{(n)} \quad \text{für } n > n_0$$

und damit

$$a \stackrel{r/s}{<} b.$$

□□□

Kapitel 4

Sichere Stellen der $\frac{r}{s}$ -Komma-Entwicklung

Da die $\frac{r}{s}$ -Komma-Ganzheitsentwicklung einer Zahl $a \in \mathbb{R}^+$ nach Satz 3.3 nicht abbricht, sich eine solche Entwicklung andererseits „von hinten her“ ergibt, muß man bei einer endlichen Stelle nach dem Komma beginnen und erhält somit niemals die volle Ganzheitsentwicklung von a , sondern stets nur eine Näherungsentwicklung.

Es ergibt sich damit die Frage, bis zu welcher Stelle eine solche Näherungsentwicklung mit der tatsächlichen Entwicklung von a übereinstimmt.

Bemerkung 4.1

Da $\frac{r}{s}$ -Komma-Ganzheitsentwicklungen nicht periodisch sind, gelten im folgenden nur die echten Ungleichungen.

Ist nun

$$(4.2) \quad a_0 a_1 \cdots a_{k-1}, a_k \cdots a_m a_{m+1} \cdots; \quad a_0 \neq 0$$

eine $\frac{r}{s}$ -Komma-Ganzheitsentwicklung von a , so ist

$$(4.3) \quad a_0 a_1 \cdots a_{k-1} a_k \cdots a_m \stackrel{r/s}{\sim} sn_{m-k+1}; \quad n_{m-k+1} \in \mathbb{N}$$

eine ganze durch s teilbare Zahl und

$$(4.4) \quad a_0 a_1 \cdots a_{k-1}, a_k \cdots a_m \stackrel{r/s}{\sim} sn_{m-k+1} \left(\frac{s}{r}\right)^{m-k+1} \stackrel{4.1}{<} a$$

ein Näherungswert zu a .

Aus (4.4) ergibt sich für sn_{m-k+1} eine obere Grenze:

$$(4.5) \quad sn_{m-k+1} < a \left(\frac{r}{s}\right)^{m-k+1}.$$

Nach dem Hilfssatz 3.11 gilt

$$(4.6) \quad 0 \stackrel{4.1}{<} 0, 0 \cdots 0 a_{m+1} \cdots \stackrel{r/s}{\sim} \sum_{j=m+1}^{\infty} a_j \left(\frac{s}{r}\right)^{j-(k-1)} \stackrel{4.1}{<} \frac{(r-1)}{(r-s)} s \left(\frac{s}{r}\right)^{m-k+1}.$$

Damit erhält man für den Näherungswert von a die untere Abschätzung

$$a - \frac{(r-1)}{(r-s)} s \left(\frac{s}{r}\right)^{m-k+1} < sn_{m-k+1} \left(\frac{s}{r}\right)^{m-k+1}$$

und für sn_{m-k+1} die untere Grenze

$$(4.7) \quad a \left(\frac{r}{s}\right)^{m-k+1} - \frac{(r-1)}{(r-s)} s < sn_{m-k+1}.$$

Aus (4.5) und (4.7) resultiert für sn_{m-k+1}

$$(4.8) \quad a \left(\frac{r}{s}\right)^{m-k+1} - \frac{(r-1)}{(r-s)} s < sn_{m-k+1} < a \left(\frac{r}{s}\right)^{m-k+1}.$$

Damit ergeben sich für sn_{m-k+1} die folgenden Möglichkeiten

$$(4.9) \quad \begin{aligned} sn_{m-k+1} &= \left[a \left(\frac{r}{s}\right)^{m-k+1} \right]_s - vs; \\ v &\in \mathbb{N}; \quad 0 \leq v \leq \left\lfloor \frac{r-1}{r-s} \right\rfloor \end{aligned}$$

mit

$$(4.10) \quad \begin{cases} v \neq 0 & a \left(\frac{r}{s}\right)^{m-k+1} \equiv 0 \pmod{s} \\ v \neq \frac{r-1}{r-s} & \frac{r-1}{r-s} \in \mathbb{N}. \end{cases} \quad \text{für}$$

Für alle diese v entwickelt man nun die entsprechenden Näherungswerte

$$\begin{aligned} sn_{m-k+1} \left(\frac{s}{r}\right)^{m-k+1} &= \left(\left[a \left(\frac{r}{s}\right)^{m-k+1} \right]_s - vs \right) \left(\frac{s}{r}\right)^{m-k+1} \\ &\stackrel{r/s}{\sim} a_0^{(v)} \cdots a_{k(v)-1}^{(v)}, a_{k(v)}^{(v)} \cdots a_m^{(v)}; \quad a_0^{(v)} \neq 0. \end{aligned}$$

Stimmen alle diese Entwicklungen einschließlich des Kommas bis zur t -ten Stelle überein

$$\forall v : \left\{ k(v) = k \wedge a_j^{(v)} = a_j; \quad j = 0, \dots, t; \quad 0 \leq t \leq m \right\},$$

so beginnt die – bis zu dieser Stelle eindeutige – $\frac{r}{s}$ -Komma-Gantheitsentwicklung mit

$$a \stackrel{r/s}{\sim} a_0 \cdots a_{k-1}, a_k \cdots a_t \cdots,$$

die Stellen a_j mit $j = 0, \dots, t$ sind also „sicher“.

Bezeichnung 4.11

Dieses Verfahren zur Berechnung sicherer Stellen wird im weiteren mit **Sichere-Stellen-Verfahren** bezeichnet.

Beispiel:

1.) $\frac{3}{2}$ -Komma-Ganzheitsentwicklung von 2.

Man geht von einer Entwicklung mit

$$m - k + 1 = 20$$

Stellen nach dem Komma aus. Mit

$$(4.12) \quad 2 \left(\frac{3}{2} \right)^{20} \approx 6650,5 \not\equiv 0 \pmod{2}$$

entnimmt man (4.9) und (4.10), daß die Entwicklung der beiden Näherungswerte

$$\left(\frac{2}{3} \right)^{20} \left(\left[2 \cdot \left(\frac{3}{2} \right)^{20} \right]_2 - 2 \cdot v \right) \stackrel{(4.12)}{=} \begin{cases} 6650 \left(\frac{2}{3} \right)^{20}; & v = 0 \\ 6648 \left(\frac{2}{3} \right)^{20}; & v = 1 \end{cases}$$

auf Übereinstimmung zu untersuchen sind.

Man erhält also

$$6650 \stackrel{3/2}{\sim} 2120222101010110212$$

und

$$6648 \stackrel{3/2}{\sim} 2120222101010110210.$$

Für die Darstellung der 2 muß das Komma nun um 20 Stellen zurückverschoben werden. Also folgt für 2 auf 20 Stellen:

$$2 \stackrel{3/2}{\sim} 0,02120222101010110212 \cdots$$

oder

$$2 \stackrel{3/2}{\sim} 0,02120222101010110210 \cdots.$$

19 Stellen für die Zahl 2 sind also sicher:

$$2 \stackrel{3/2}{\sim} 0,0212022210101011021 \cdots.$$

2.) $\frac{3}{2}$ -Komma-Ganzheitsentwicklung von 64.

Man geht von einer Entwicklung mit

$$m - k + 1 = 5$$

Stellen nach dem Komma aus. Mit

$$(4.13) \quad 64 \left(\frac{3}{2}\right)^5 = 486 \equiv 0 \pmod{2}$$

entnimmt man (4.9) und (4.10), daß die Entwicklung der

$$\left(\frac{2}{3}\right)^5 \left(\left[64 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^5 \right]_2 - 2 \cdot v \right) \stackrel{(4.13)}{=} 484 \left(\frac{2}{3}\right)^5 ; v = 1$$

sicher ist.

Man erhält also

$$484 \stackrel{3/2}{\sim} 2101121211111.$$

Für die Darstellung von 64 muß das Komma nun um 5 Stellen zurückverschoben werden.

$$64 \stackrel{3/2}{\sim} 21011212, 11111 \dots$$

Alle berechneten Stellen sind sicher und somit auch die 5 nach dem Komma.

Kapitel 5

Werte Verteilung der $\frac{r}{s}$ -Komma-Ganzheitsentwicklungen von positiven reellen Zahlen

Mit dem in Kapitel 4 entwickelten Sichere-Stellen-Algorithmus können $\frac{r}{s}$ -Komma-Ganzheitsentwicklungen auf endlich viele Stellen angegeben werden. Um nun die $\frac{r}{s}$ -Komma-Ganzheitsentwicklungen aller positiver reeller Zahlen zu charakterisieren, werden in diesem Kapitel die $\frac{r}{s}$ -Komma-Ganzheitsentwicklungen der natürlichen Zahlen im Hinblick auf deren Werte Verteilung vor und hinter dem Komma betrachtet. Dazu werden zwei verschiedene Verfahren vorgestellt, das Koeffizienten-Verfahren und das Sprungstellen-Verfahren. Mit dem Sprungstellen-Verfahren werden dann alle positiven reellen Zahlen untersucht. Die erste eindeutige Aussage bekommt man für die natürlichen Zahlen, die durch s teilbar sind. Dafür werden noch folgende Bezeichnungen benötigt:

Bezeichnung 5.1

Der Wert vor dem Komma einer $\frac{r}{s}$ -Komma-Ganzheitsentwicklung von a wird mit α_v und der hinter dem Komma mit α_h bezeichnet.

Mit $a \stackrel{r/s}{\sim} a_0 \cdots a_{k-1}, a_k \cdots$ gilt also

$$(5.2) \quad a = \alpha_v + \alpha_h \text{ mit } \begin{cases} \alpha_v \stackrel{r/s}{\sim} a_0 \cdots a_{k-1}, & 0 \cdots \\ \alpha_h \stackrel{r/s}{\sim} & 0, a_k \cdots, \end{cases}$$

kurz:

$$a \stackrel{r/s}{\sim} \alpha_v, \alpha_h.$$

Wenn für Entwicklungen andere Buchstaben benutzt werden, werden jeweils für die Werte vor und nach dem Komma die zugehörigen griechischen Buchstaben gewählt.

5.1 Werteverteilung und Koeffizienten-Verfahren

Bevor nun das Koeffizienten-Verfahren anhand eines Beispiels erläutert wird, werden zuvor noch allgemeine Aussagen über die Werteverteilungen bewiesen. Mit (5.2) kann man nun folgenden Satz formulieren:

Satz 5.3

Für $r \geq 2s - 1$ und $a \equiv 0 \pmod s$ gilt $a \stackrel{r/s}{\approx} a - s, s$.

Beweis:

Mit

$$a \left(\frac{r}{s} \right)^0 = a \equiv 0 \pmod s$$

und (4.9) gilt

$$\alpha_v = sn_0 = \left[a \left(\frac{r}{s} \right)^0 \right]_s - vs = a - vs; \text{ mit } v \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq v \leq \left\lfloor \frac{r-1}{r-s} \right\rfloor.$$

Für $r \geq 2s - 1$ folgt $\frac{r+1}{2} \geq s$ und somit

$$(5.4) \quad 0 \leq v \leq \frac{r-1}{r-s} \leq \frac{r-1}{r-\frac{r+1}{2}} = \frac{2(r-1)}{r-1} = 2.$$

Nach (4.10) gilt hier

$$v \neq 0 \quad \text{da} \quad a \equiv 0 \pmod s \quad \text{und} \quad v \neq 2 \quad \text{da} \quad \frac{r-1}{r-s} \leq 2.$$

Es gelten also die echten Ungleichungen. Daraus folgt $v = 1$ und somit ergibt sich

$$\alpha_v = a - s \wedge \alpha_h = s.$$

□□□

Bemerkung 5.5

Wegen (3.7) gilt $\alpha_v \equiv 0 \pmod s$ für alle $a \in \mathbb{N}$ mit $a \stackrel{r/s}{\approx} \alpha_v, \alpha_h$.

Für die Zahlen $b \not\equiv 0 \pmod s$ kann keine eindeutige Aussage getroffen werden. Hier gilt:

Satz 5.6

Für die Darstellung $b \stackrel{r/s}{\approx} \beta_v, \beta_h$ einer ganzen Zahl $b \not\equiv 0 \pmod s$ können nur die Werte β_h mit

$$0 < \beta_h < \frac{(r-1)s}{r-s}, \quad \beta_h \not\equiv 0 \pmod s$$

in Frage kommen. Das sind

$$(5.7) \quad \sharp(\beta_h) = \left[\frac{(r-1)s}{r-s} \right]^\uparrow - \left[\frac{r-1}{r-s} \right]^\uparrow$$

verschiedene Werte.

Beweis:

Die Einschränkungen für β_h folgen aus Hilfssatz 3.11, Bemerkung 5.5 und

$$b = \beta_v + \beta_h \not\equiv 0 \pmod s, \quad \beta_v \equiv 0 \pmod s.$$

Aus den $\left[\frac{(r-1)s}{r-s} \right]^\uparrow - 1$ ganzen Zahlen, welche die Ungleichung erfüllen, sind die $\left[\frac{(r-1)s}{r-s} \cdot \frac{1}{s} \right]^\uparrow - 1 = \left[\frac{r-1}{r-s} \right]^\uparrow - 1$ Vielfachen von s abzuziehen. Das ergibt den angegebenen Wert für $\sharp(\beta_h)$.

□□□

Satz 5.8

Genau für die Basen $\frac{r}{2}$ mit $r \geq 5$ erhält man stets eindeutige Werte nach dem Komma, nämlich

$$1. \alpha_h = 2 \quad \text{für} \quad a \equiv 0 \pmod 2$$

und

$$2. \beta_h = 1 \quad \text{für} \quad b \not\equiv 0 \pmod 2.$$

Beweis:

1. folgt nach Satz 5.3.

Zu 2.:

Genau für

$$\sharp(\beta_h) = \left[\frac{(r-1)s}{r-s} \right]^\uparrow - \left[\frac{r-1}{r-s} \right]^\uparrow = 1$$

erhält man einen eindeutigen Wert nach dem Komma:

$$\begin{aligned} \left[\frac{(r-1)s}{r-s} \right]^\uparrow &= \left[\frac{r-1}{r-s} \right]^\uparrow + 1 \\ \iff (n-1) < \frac{r-1}{r-s} \leq n \quad \text{und} \quad n < \frac{(r-1)s}{r-s} \leq n+1 \quad \text{mit } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

$\sharp(\beta_h) = 1$ ist also gleichbedeutend mit

$$(5.9) \quad n - 1 < \frac{r - 1}{r - s} < \frac{(r - 1)s}{r - s} \leq n + 1; \quad n \in \mathbb{N}.$$

1. Fall $r \geq 2s - 1$:

Hier gilt

$$2 \geq \frac{r - 1}{r - s}.$$

Aus (5.9) erhält man mit $\frac{(r-1)s}{r-s} > 2$ wegen $r > s \geq 2$

$$n - 1 < \frac{r - 1}{r - s} \leq 2, \quad 2 < \frac{(r - 1)s}{r - s} \leq n + 1,$$

also $n \leq 2$ und $1 < n$, somit $n = 2$.

Damit wird aus (5.9)

$$1 < \frac{r - 1}{r - s} < s \frac{r - 1}{r - s} \leq 3,$$

was genau für $s \geq 2$ und $r \geq 4$ bzw. $r \geq 5$ wegen $\text{ggT}(r, s) = \text{ggT}(r, 2) = 1$ erfüllt ist. In diesen Fällen hat man auch $r \geq 2s - 1$.

□

2. Fall $r < 2s - 1$:

Hier erhält man wie oben $\frac{r-1}{r-s} > 2$, und damit folgt aus (5.9) der Widerspruch

$$2 < \left(\frac{r - 1}{r - s} \right) (s - 1) \leq n + 1 - \frac{r - 1}{r - s} < (n + 1) - (n - 1) = 2.$$

Für solche Basen $\frac{r}{s}$ gilt also nicht allgemein $\sharp(\beta_h) = 1$.

□

Genau für die in Satz 5.8 angegebenen Basen gilt also $\sharp(\beta_h) = 1$ und nach Satz 5.6 somit $\beta_h = 1$.

□□□

Beispiele für $\frac{r}{s}$ -Komma-Entwicklungen von natürlichen Zahlen zu verschiedenen Basen

1.) Basis $\frac{3}{2}$:

Vorab ist zu sagen, daß mit Bemerkung 5.5 alle $\alpha_v \equiv 0 \pmod{2}$ für $a \in \mathbb{N}_0$, $a \stackrel{3/2}{\approx} \alpha_v, \alpha_h$ sind.

(a) $a \equiv 0 \pmod{2}$:

Mit Satz 5.3 gilt für alle $a \equiv 0 \pmod{2}$:

$$\alpha_v = a - 2 \quad \text{und} \quad \alpha_h = 2.$$

Auf 10 sichere Stellen sehen die $\frac{3}{2}$ -Komma-Ganzheitsentwicklungen der ersten ganzen geraden Zahlen folgendermaßen aus:

a		$\frac{3}{2}$ -Darstellung		α_v, α_h
2	$\stackrel{3/2}{\sim}$	0,0212022101	$\stackrel{3/2}{\approx}$	0,2
4	$\stackrel{3/2}{\sim}$	2,1200120120	$\stackrel{3/2}{\approx}$	2,2
6	$\stackrel{3/2}{\sim}$	21,2001201202	$\stackrel{3/2}{\approx}$	4,2
8	$\stackrel{3/2}{\sim}$	210,1121001001	$\stackrel{3/2}{\approx}$	6,2
10	$\stackrel{3/2}{\sim}$	212,0220212100	$\stackrel{3/2}{\approx}$	8,2
12	$\stackrel{3/2}{\sim}$	2101,1210010010	$\stackrel{3/2}{\approx}$	10,2
14	$\stackrel{3/2}{\sim}$	2120,0122202220	$\stackrel{3/2}{\approx}$	12,2
16	$\stackrel{3/2}{\sim}$	2122,1112002002	$\stackrel{3/2}{\approx}$	14,2.

Nach dem Komma stehen hier also stets $\frac{3}{2}$ -Entwicklungen der Zahl 2.

Satz 5.10

Es gibt $\frac{3}{2}$ -Komma-Entwicklungen $2 \stackrel{3/2}{\sim} 0, \dots$, die nicht als Entwicklung eines Termes α_h auftreten.

Beweis:

Da die Entwicklungen, die den Ganzheitsbedingungen genügen nach Satz 3.3 nicht periodisch werden können, ist

$$2 \stackrel{3/2}{\sim} 0, \overline{1}$$

eine Darstellung, die in einer $\frac{3}{2}$ -Komma-Gantheitsentwicklung $a \stackrel{3/2}{\approx} \alpha_v, \alpha_h$ nie auftreten kann.

□□□

(b) $b \not\equiv 0 \pmod{2}$:

Mit (5.7) ergeben sich $\left[\frac{2 \cdot 2}{3-2}\right]^\uparrow - \left[\frac{3-1}{3-2}\right]^\uparrow = 4 - 2 = 2$ verschiedene Möglichkeiten für β_h , mit $b \stackrel{3/2}{\approx} \beta_v, \beta_h$.

Genauer gilt mit dem maximalen Rest kleiner als $\frac{(r-1)s}{r-s} = 4$, daß

$$(5.11) \quad \begin{aligned} \beta_v &= a - 3 \wedge \beta_h = 3 \text{ oder} \\ \beta_v &= a - 1 \wedge \beta_h = 1 \end{aligned}$$

die einzig möglichen Darstellungen für $b \not\equiv 0 \pmod{2}$ sind.

Es ist bisher noch nicht gelungen, eine allgemeine Aussage zu treffen, bei welchen ungeraden Zahlen $\beta_h = 3$ ist und bei welchen $\beta_h = 1$ ist.

Es gilt aber folgende Teilaussage:

Satz 5.12

$\beta_v \not\equiv 6 \pmod{8}$, für $b \not\equiv 0 \pmod{2}$, mit $b \stackrel{3/2}{\approx} \beta_v, \beta_h$.

Beweis:

Behauptung:

Im $\frac{3}{2}$ -System folgen nach jeder Zwischenzahl $n_j \equiv 6 \pmod{8}$ immer zwei Einsen.

Beweis:

Auf jeden Knoten von $B_{\frac{3}{2}}$ mit dem Index $n_j = \beta_v \equiv 6 \pmod{8}$ folgen wegen $\frac{3}{2}n_j + 1 \equiv 0 \pmod{2}$ und $\frac{9}{4}n_j + \frac{5}{2} \equiv 0 \pmod{2}$ zwei Kanten mit dem Koeffizienten 1 (siehe Abbildung 5.1).

□

Aus $\beta_v \equiv 6 \pmod{8}$ folgt somit

$$\beta_h \stackrel{3/2}{\sim} 0, 11 \dots$$

und damit

$$\beta_h > \frac{2}{3} + \frac{4}{9} = \frac{10}{9} > 1$$

bzw. nach Hilfssatz 3.11

$$\beta_h < \frac{10}{9} + \frac{16}{9} = \frac{26}{9} (\stackrel{3/2}{\sim} 0, 11\overline{2}) < 3,$$

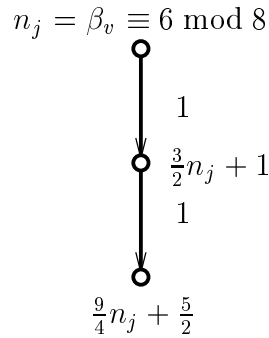


Abbildung 5.1: Ausschnitt aus dem Wurzelbaum $B_{\frac{3}{2}}^k$ mit $n_j \equiv 6 \pmod{8}$

also steht $\beta_h = 2$ im Widerspruch zu (5.11).

□□□

Bezeichnung 5.13

Dieses in dem obigen Beweis benutzte Verfahren zur Untersuchung der Werte α_h bzw. β_h von ganzen Zahlen a bzw. b wird als **Koeffizienten-Verfahren** bezeichnet.

Aus Satz 5.12 folgt, daß alle $b \equiv 1 \pmod{8}$ mit $\beta_v \equiv 0 \pmod{8}$ und $\beta_h = 1$ und alle $b \equiv 7 \pmod{8}$ mit $\beta_v \equiv 4 \pmod{8}$ und $\beta_h = 3$ dargestellt werden.

Für die ungeraden Zahlen erhält man also mit $b \equiv n \pmod{8}$

n	β_v, β_h
1 $\overset{3/2}{\approx}$	0,1
3 $\overset{3/2}{\approx}$	0,3 \vee 2,1
5 $\overset{3/2}{\approx}$	2,3 \vee 4,1
7 $\overset{3/2}{\approx}$	4,3 .

Wird das Koeffizienten-Verfahren wiederholt angewendet, so ergibt sich beispielsweise, daß für $\beta_v \equiv 2 \pmod{32}$ $\beta_h = 3$ und für $\beta_v \equiv 26 \pmod{32}$ $\beta_h = 1$ sein muß. Es folgt wie oben, daß für $b \equiv 3 \pmod{32}$ $\beta_h = 3$ und für $b \equiv 29 \pmod{32}$ $\beta_h = 1$ ist.

Zusammen mit obigem Ergebnis erhält man so mit $b \equiv n \pmod{32}$

n	β_v, β_h	n	β_v, β_h
1 $\overset{3/2}{\approx}$	0,1	3 $\overset{3/2}{\approx}$	0,3
5 $\overset{3/2}{\approx}$	2,3 \vee 4,1	7 $\overset{3/2}{\approx}$	4,3
9 $\overset{3/2}{\approx}$	8,1	11 $\overset{3/2}{\approx}$	8,3 \vee 10,1
13 $\overset{3/2}{\approx}$	10,3 \vee 12,1	15 $\overset{3/2}{\approx}$	12,3
17 $\overset{3/2}{\approx}$	16,1	19 $\overset{3/2}{\approx}$	16,3 \vee 18,1

n	β_v, β_h	n	β_v, β_h
21 $\overset{3/2}{\approx}$	18,3 \vee 20,1	23 $\overset{3/2}{\approx}$	20,3
25 $\overset{3/2}{\approx}$	24,1	27 $\overset{3/2}{\approx}$	24,3 \vee 26,1
29 $\overset{3/2}{\approx}$	28,1	31 $\overset{3/2}{\approx}$	28,3 .

Betrachtet man die ungeraden Zahlen gemäß ihrer Kongruenzen

$b \equiv n \pmod{2^m}$ für immer größere m , so erhält man für einen wachsenden Anteil der Restklassen modulo m die eindeutigen Aussagen $\beta_h = 1$ oder $\beta_h = 3$. Es scheinen aber stets Restklassen übrig zu bleiben, für die man keine Aussage machen kann.

Im folgenden werden die ersten ungeraden Zahlen b bis 31 auf 4 sichere Stellen angegeben. Dazu werden auch die Werte β_v und β_h der Entwicklung berechnet.

b	$\frac{3}{2}$ – Darst.	β_v, β_h	b	$\frac{3}{2}$ – Darst.	β_v, β_h
1 $\overset{3/2}{\approx}$	0,0021	$\overset{3/2}{\approx}$ 0,1	3 $\overset{3/2}{\approx}$	0,2120	$\overset{3/2}{\approx}$ 0,3
5 $\overset{3/2}{\approx}$	21,0110	$\overset{3/2}{\approx}$ 4,1	7 $\overset{3/2}{\approx}$	21,2211	$\overset{3/2}{\approx}$ 4,3
9 $\overset{3/2}{\approx}$	212,0012	$\overset{3/2}{\approx}$ 8,1	11 $\overset{3/2}{\approx}$	2101,1000	$\overset{3/2}{\approx}$ 10,1
13 $\overset{3/2}{\approx}$	2120,0101	$\overset{3/2}{\approx}$ 12,1	15 $\overset{3/2}{\approx}$	2120,2202	$\overset{3/2}{\approx}$ 12,3
17 $\overset{3/2}{\approx}$	21011,0020	$\overset{3/2}{\approx}$ 16,1	19 $\overset{3/2}{\approx}$	21011,2121	$\overset{3/2}{\approx}$ 16,3
21 $\overset{3/2}{\approx}$	21200,1222	$\overset{3/2}{\approx}$ 18,3	23 $\overset{3/2}{\approx}$	21202,2210	$\overset{3/2}{\approx}$ 20,3
25 $\overset{3/2}{\approx}$	210110,0011	$\overset{3/2}{\approx}$ 24,1	27 $\overset{3/2}{\approx}$	210112,1001	$\overset{3/2}{\approx}$ 26,1
29 $\overset{3/2}{\approx}$	212001,0100	$\overset{3/2}{\approx}$ 28,1	31 $\overset{3/2}{\approx}$	212001,2220	$\overset{3/2}{\approx}$ 28,3.

Bemerkung 5.14

Das Koeffizienten-Verfahren ermöglicht nur die Restbetrachtung für natürliche Zahlen.

2.) Basis $\frac{17}{2}$:

Satz 5.8 ergibt folgende eindeutige Darstellung:

$$a \overset{17/2}{\approx} a - 2, 2 \quad \text{für } a \equiv 0 \pmod{2}$$

und

$$b \overset{17/2}{\approx} b - 1, 1 \quad \text{für } b \not\equiv 0 \pmod{2}.$$

Im folgenden werden die ersten 10 Zahlen zur Basis $\frac{17}{2}$ auf 4 sichere Stellen nach dem Komma angegeben, wobei die Koeffizienten, die größer als 9 sind, unterstrichen wurden, um Verwechslungen mit zwei einziffrigen Koeffizienten zu vermeiden.

a	$\frac{17}{2}$ – Darstellung	α_v, α_h
1	$\overset{17/2}{\sim} 0, 8 \ 4 \ 2 \ 1$	$\overset{17/2}{\approx} 0, 1$
2	$\overset{17/2}{\sim} 0, \underline{16} \ 8 \ 4 \ 2$	$\overset{17/2}{\approx} 0, 2$
3	$\overset{17/2}{\sim} 2, 7 \ \underline{12} \ 6 \ 3$	$\overset{17/2}{\approx} 2, 1$
4	$\overset{17/2}{\sim} 2, \underline{15} \ \underline{16} \ 8 \ 4$	$\overset{17/2}{\approx} 2, 2$
5	$\overset{17/2}{\sim} 4, 8 \ 3 \ \underline{10} \ 5$	$\overset{17/2}{\approx} 4, 1$
6	$\overset{17/2}{\sim} 4, \underline{16} \ 7 \ \underline{12} \ 6$	$\overset{17/2}{\approx} 4, 2$
7	$\overset{17/2}{\sim} 6, 7 \ \underline{11} \ \underline{14} \ 7$	$\overset{17/2}{\approx} 6, 1$
8	$\overset{17/2}{\sim} 6, \underline{15} \ \underline{15} \ \underline{16} \ 8$	$\overset{17/2}{\approx} 6, 2$
9	$\overset{17/2}{\sim} 8, 8 \ 4 \ 1 \ 9$	$\overset{17/2}{\approx} 8, 1$
10	$\overset{17/2}{\sim} 8, \underline{16} \ 8 \ 3 \ \underline{10}$	$\overset{17/2}{\approx} 8, 2.$

3.) Basis $\frac{9}{4}$:

Die durch 4 teilbaren Zahlen a haben nach Satz 5.3 die Darstellung

$$a \overset{9/4}{\approx} a - 4, 4.$$

Für alle Zahlen $b \not\equiv 0 \pmod{4}$ gibt es nach (5.7)

$$\sharp(\beta_h) = \left[\frac{32}{5} \right]^\uparrow - \left[\frac{8}{5} \right]^\uparrow = 7 - 2 = 5$$

mögliche Werte $\beta_h = 1, 2, 3, 5, 6$.

Die ersten 16 Zahlen in der $\frac{9}{4}$ -Darstellung für 5 sichere Stellen nach dem Komma sehen folgendermaßen aus:

a	$\frac{9}{4}$ – Darstellung	α_v, α_h	a	$\frac{9}{4}$ – Darstellung	α_v, α_h
1	$\overset{9/4}{\sim} 0, 00862$	$\overset{9/4}{\approx} 0, 1$	2	$\overset{9/4}{\sim} 0, 08234$	$\overset{9/4}{\approx} 0, 2$
3	$\overset{9/4}{\sim} 0, 43506$	$\overset{9/4}{\approx} 0, 3$	4	$\overset{9/4}{\sim} 0, 47813$	$\overset{9/4}{\approx} 0, 4$
5	$\overset{9/4}{\sim} 0, 82775$	$\overset{9/4}{\approx} 0, 5$	6	$\overset{9/4}{\sim} 4, 31182$	$\overset{9/4}{\approx} 4, 2$
7	$\overset{9/4}{\sim} 4, 35454$	$\overset{9/4}{\approx} 4, 3$	8	$\overset{9/4}{\sim} 4, 70761$	$\overset{9/4}{\approx} 4, 4$
9	$\overset{9/4}{\sim} 4, 78133$	$\overset{9/4}{\approx} 4, 5$	10	$\overset{9/4}{\sim} 8, 23440$	$\overset{9/4}{\approx} 8, 2$
11	$\overset{9/4}{\sim} 8, 27712$	$\overset{9/4}{\approx} 8, 3$	12	$\overset{9/4}{\sim} 8, 62674$	$\overset{9/4}{\approx} 8, 4$
13	$\overset{9/4}{\sim} 43, 15353$	$\overset{9/4}{\approx} 12, 1$	14	$\overset{9/4}{\sim} 43, 15353$	$\overset{9/4}{\approx} 12, 2$
15	$\overset{9/4}{\sim} 43, 50660$	$\overset{9/4}{\approx} 12, 3$	16	$\overset{9/4}{\sim} 43, 58032$	$\overset{9/4}{\approx} 12, 4.$

Bei diesen 16 ganzen Zahlen kommt der Wert $\beta_h = 6$ nicht vor. Er wird aber bei größeren Zahlen angenommen, zum Beispiel bei $102 \approx^{9/4} 96,6$.

Aus $\beta_v \equiv 0 \pmod{4}$ und $\beta_h = 1, 2, 3, 5, 6$ folgt mit $b \approx^{9/4} \beta_v, \beta_h$:

$$\begin{aligned} b \equiv 1 \pmod{4} &\Rightarrow \beta_h = 1 \quad \vee \quad \beta_h = 5 \\ b \equiv 2 \pmod{4} &\Rightarrow \beta_h = 2 \quad \vee \quad \beta_h = 6 \\ b \equiv 3 \pmod{4} &\Rightarrow \beta_h = 3. \end{aligned}$$

4.) Basis $\frac{5}{4}$:

Für diese Basis ist der Satz 5.3 nicht anwendbar, da $r < 2s - 1$ gilt. Wie man später sieht, besitzen die durch 4 teilbaren Zahlen in diesem Fall zwei mögliche Reste:

$$\alpha_h = 4 \quad \text{oder} \quad \alpha_h = 2s = 8.$$

Mit (5.7) gibt es

$$\sharp(\beta_h) = \left[\frac{4 \cdot 4}{5 - 4} \right]^\uparrow - \left[\frac{4}{5 - 4} \right]^\uparrow = 16 - 4 = 12$$

mögliche Werte 1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 13, 14, 15 für β_h .

Zum Vergleich mit den vorangegangenen Beispielen werden hier auch die ersten 20 Zahlen auf 11 sichere Stellen nach dem Komma angegeben:

a	$\frac{5}{4}$ – Darstellung	α_v, α_h	a	$\frac{5}{4}$ – Darstellung	α_v, α_h
1	$\approx^{5/4} 0,00000000004$	$\approx^{5/4} 0,1$	2	$\approx^{5/4} 0,00000004321$	$\approx^{5/4} 0,2$
3	$\approx^{5/4} 0,00000432103$	$\approx^{5/4} 0,3$	4	$\approx^{5/4} 0,00004321031$	$\approx^{5/4} 0,4$
5	$\approx^{5/4} 0,00043210313$	$\approx^{5/4} 0,5$	6	$\approx^{5/4} 0,00432103134$	$\approx^{5/4} 0,6$
7	$\approx^{5/4} 0,04321031301$	$\approx^{5/4} 0,7$	8	$\approx^{5/4} 0,04321420233$	$\approx^{5/4} 0,8$
9	$\approx^{5/4} 0,43210313011$	$\approx^{5/4} 0,9$	10	$\approx^{5/4} 0,43214202332$	$\approx^{5/4} 0,10$
11	$\approx^{5/4} 4,32103130110$	$\approx^{5/4} 4,7$	12	$\approx^{5/4} 4,32103134003$	$\approx^{5/4} 4,8$
13	$\approx^{5/4} 4,32142023324$	$\approx^{5/4} 4,9$	14	$\approx^{5/4} 43,21031301102$	$\approx^{5/4} 8,6$
15	$\approx^{5/4} 43,21031340034$	$\approx^{5/4} 8,7$	16	$\approx^{5/4} 43,21420233201$	$\approx^{5/4} 8,8$
17	$\approx^{5/4} 432,10313011022$	$\approx^{5/4} 12,5$	18	$\approx^{5/4} 432,10313400304$	$\approx^{5/4} 12,6$
19	$\approx^{5/4} 432,10313404232$	$\approx^{5/4} 12,7$	20	$\approx^{5/4} 432,14202332014$	$\approx^{5/4} 12,8$

5.2 Das Sprungstellen-Verfahren

Nun wird noch ein weiteres Verfahren vorgestellt, mit dem die Werte α_v und α_h der natürlichen Zahlen a berechnet werden können.

Die Sprungstellen

Sei S eine $\frac{r}{s}$ -ambige Zahl, deren A-Wurzel über, jedoch nicht unmittelbar über der Kommaebene liegt, so daß die Verzweigung in Unter- und Oberentwicklung bereits vor der Kommaebene stattfindet. Da diese beiden Entwicklungen stets durch benachbarte Knoten einer Ebene verlaufen, deren Koeffizienten vor der Kommaebene sich um s unterscheiden, hat man für die Unter- bzw. Oberentwicklung

$$(5.15) \quad S \overset{r/s}{\approx} \alpha_v, \alpha_h \quad \text{bzw.} \quad S \overset{r/s}{\approx} \alpha_v + s, \alpha_h - s,$$

die ambige Natur von s zeigt sich hier also bereits vor dem Komma.

Da die $\frac{r}{s}$ -Komma-Ganzheitsentwicklungen lexikographisch geordnet sind, gilt

$$q < q^* \implies \alpha_v \leq \alpha_v^* \quad \text{für} \quad \begin{cases} q \overset{r/s}{\approx} \alpha_v, \alpha_h \\ q^* \overset{r/s}{\approx} \alpha_v^*, \alpha_h^*. \end{cases}$$

Sind daher

$$0 < S_1 < S_2 < \dots < S_j < \dots$$

alle ambigen Zahlen der oben betrachteten Art, so hat man für $q \overset{r/s}{\approx} \alpha_v, \alpha_h$ $\alpha_v = 0$ für $0 \leq q < S_1$ und $\alpha_v = s$ für $S_1 < q < S_2$ bzw. allgemein mit $S_0 = 0$

$$(5.16) \quad \alpha_v = js \quad \text{für} \quad S_j < q < S_{j+1}; \quad j \in \mathbb{N}.$$

Bezeichnung 5.17

Zwischen den S_j ist also der eindeutige Entwicklungsanteil α_v von q vor dem Komma konstant und springt, wenn q wachsend die Stelle S_j überschreitet von $(j-1)s$ auf js , während für $q = S_j$ selbst diese beiden Werte auftreten. Die S_j werden daher als **Sprungstellen**, genauer **$\frac{r}{s}$ -Sprungstellen** bezeichnet. Zu welcher $\frac{r}{s}$ -Komma-Ganzheitsentwicklung sie gehören, wird jeweils aus dem Zusammenhang hervorgehen.

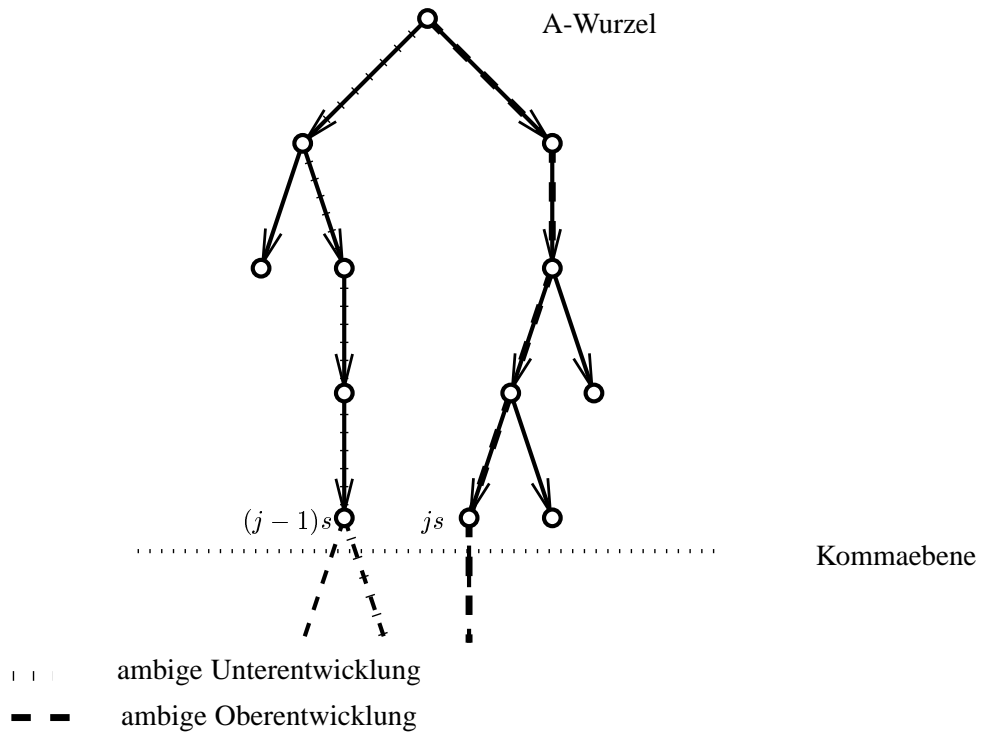


Abbildung 5.2: Darstellung einer ambigen Unter- und Oberentwicklung vor der Kommaebene

Bemerkung 5.18

Besitzt S

$$S \stackrel{r/s}{\approx} \left\{ \begin{array}{ll} \alpha_v & , \quad \alpha_h \\ \alpha_v + s & , \quad \alpha_h - s \\ \alpha_v + 2s & , \quad \alpha_h - 2s; \\ \vdots & \vdots \\ \alpha_v + (t-1)s & , \quad \alpha_h - (t-1)s \end{array} \right. \quad t > 2$$

genau $t \frac{r}{s}$ -Komma-Gantheitsentwicklungen, ist also überambig, so springt der Entwicklungsanteil vor dem Komma von q , wenn q wachsend S überschreitet, um $(t-1)s$. In S fallen dann gewissermaßen $(t-1)$ „einfache“ Sprungstellen zu einer „ $(t-1)$ -fachen“ Sprungstelle zusammen.

Die folgenden Sätze dienen zur Untersuchung der Sprungstellen zur Basis $\frac{r}{s}$.

Satz 5.19

Zwischen zwei aufeinanderfolgenden positiven Vielfachen

$$a_1 = ks, \quad a_2 = (k+1)s; \quad k \in \mathbb{N}$$

von s , also $a_2 = a_1 + s$, liegt genau eine Sprungstelle, wenn $r \geq 2s - 1$ ist. Die einzige Ausnahme bildet das erste Intervall, also $k = 0$. Hier liegt die Sprungstelle $S_0 = 0$ genau auf der Intervallgrenze.

Beweis:

Gemäß Satz 5.3 besitzen a_1, a_2 die eindeutigen Darstellungen

$$a_1 \approx_{r/s} \alpha_v, s \quad \text{und} \quad a_2 \approx_{r/s} \alpha_v + s, s.$$

Nach Bezeichnung 5.17 liegt somit genau eine Sprungstelle S zwischen a_1 und a_2 . □□□

Bemerkung 5.20

1. Mit Satz 5.19 und (5.16) gilt für $r \geq 2s - 1$, daß die Sprungstellen aus den folgenden offenen Intervallen sind:

$$S_j \in]js; (j+1)s[, \quad j \in \mathbb{N} \text{ und } S_0 = 0.$$

2. $a \equiv 0 \pmod s$ selber kann wegen Satz 5.3 keine Sprungstelle sein, wenn $r \geq 2s - 1$.

Satz 5.21

Für den maximalen Abstand $d_{\max}(S_i, S_{i+1})$, $i \in \mathbb{N}_0$ zweier aufeinanderfolgender Sprungstellen zur Basis $\frac{r}{s}$ gilt

$$d_{\max}(S_i, S_{i+1}) < 2s \quad \text{für} \quad r \geq 2s - 1.$$

Beweis:

Die Aussage folgt unmittelbar aus Bemerkung 5.20. □□□

Aus Satz 5.6 kennt man die Abschätzung über die maximale Anzahl der β_h für die natürlichen Zahlen $b \not\equiv 0 \pmod s$. Weiterhin gelten folgende Aussagen:

Satz 5.22

Mit $r \geq 2s - 1$ gilt für natürliche Zahlen $b \not\equiv 0 \pmod s$:

$$\beta_h \leq 2s - 1 \quad \text{mit} \quad b \approx_{r/s} \beta_v, \beta_h.$$

Beweis:

Für ein $j \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$S_j < b \stackrel{r/s}{\approx} \beta_v, \beta_h \leq S_{j+1},$$

somit nach (5.16) $\beta_v = js$, wobei im Fall $b = S_{j+1}$ der kleinere Wert von β_v gewählt ist, bei dem also β_h größer ausfällt.

Nach Bemerkung 5.20 hat man $S_{j+1} \in](j+1)s; (j+2)s[$, also:

$$\beta_v + \beta_h = b < (j+2)s,$$

woraus mit $\beta_v = js$ die Behauptung des Satzes folgt.

□□□

Bemerkung 5.23

Wegen $S_0 = 0$ und $S_1 > s$ (Bemerkung 5.20) werden alle Nachkommawerte $\beta_h = 1, 2, \dots, s-1$ angenommen.

Satz 5.24

Für $\frac{r}{s} > 2$ können Sprungstellen nicht beliebig dicht liegen, genauer ist dann

$$(5.25) \quad d_{\min}(S_i, S_{i+1}) = s \left(\frac{s}{r} \right)^{j_0} \left(\left[\frac{r}{s} \right]_{\downarrow}^{j_0} - (s-1) \frac{r}{r-s} \right); \quad i \in \mathbb{N}_0,$$

wobei $j_0 \in \mathbb{N}_0$ maximal groß ist, so daß noch

$$(5.26) \quad \left[\frac{r}{s} \right]_{\downarrow}^{j_0} \leq \frac{s-1}{1 - \frac{s}{r} \left[\frac{r}{s} \right]_{\downarrow}}$$

gilt, eine untere Grenze für den Abstand aufeinanderfolgender Sprungstellen.

Beweis:

Nach Bemerkung 1.31 enthält $B_{\frac{r}{s}}$ wegen $\frac{r}{s} > 2$ keine 1-Knoten. Die Verhältnisse liegen daher für zwei aufeinanderfolgende Sprungstellen S_i, S_{i+1} im wesentlichen wie in Abbildung 5.3 skizziert, insbesondere trennt stets ein Unterwurzelbaum $UB_{\frac{r}{s}}^k$ mit einer Wurzel $w \in B_{\frac{r}{s}}^k(k-1)$, also direkt oberhalb der Kommaebene, diese beiden Sprungstellen.

Ist also

$$B = B \left(UB_{\frac{r}{s}}^k(\infty) \right)$$

die Breite dieses Unterwurzelbaumes auf der reellen Achse \mathbb{R}^+ , so hat man

$$(5.27) \quad S_{i+1} - S_i = B.$$

Diese Breite B ist somit abzuschätzen.

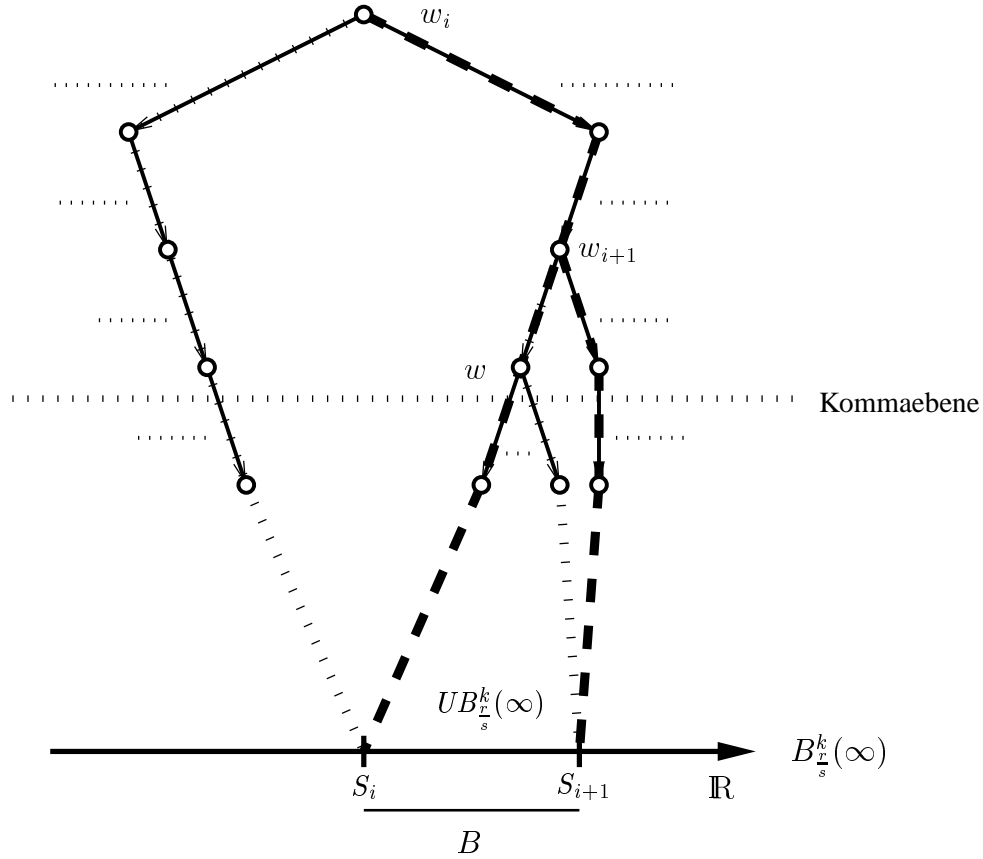


Abbildung 5.3: Darstellung des minimalen Abstands der Sprungstellen im Wurzelkommabaum

Nach Bemerkung 1.35 und Bemerkung 1.31 hat man für $j, t \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned} A\left(UB_{\frac{r}{s}}^k((j+k-1)+t)\right) &\geq \left(\frac{r}{s}\right)^t \left(A\left(UB_{\frac{r}{s}}^k(j+k-1)\right) - c\right) \\ &\geq \left(\frac{r}{s}\right)^t \left(\left[\frac{r}{s}\right]_{\downarrow}^j - c\right) \end{aligned}$$

mit

$$c = (s-1) \frac{r}{r-s}.$$

Es folgt mit $n = j + k + t$

$$(5.28) \quad A\left(UB_{\frac{r}{s}}^k(n)\right) \geq \begin{cases} \left(\frac{r}{s}\right)^{t+1} \left(\left[\frac{r}{s}\right]_{\downarrow}^j - c\right) \\ \left(\frac{r}{s}\right)^t \left(\left[\frac{r}{s}\right]_{\downarrow}^{j+1} - c\right). \end{cases}$$

Gesucht wird nun die Aufteilung

$$n = j_0 + k + t_0; \quad j_0, t_0 \in \mathbb{N}_0,$$

welche über (5.28) die beste untere Schranke liefert. Dazu betrachtet man die Ungleichungen

$$\begin{aligned} \left(\frac{r}{s}\right)^{t+1} \left(\left[\frac{r}{s}\right]_{\downarrow}^j - c\right) &\leq \left(\frac{r}{s}\right)^t \left(\left[\frac{r}{s}\right]_{\downarrow}^{j+1} - c\right) \\ \Leftrightarrow \left(\frac{r}{s}\right) \left(\left[\frac{r}{s}\right]_{\downarrow}^j - c\right) &\leq \left[\frac{r}{s}\right]_{\downarrow}^{j+1} - c \\ \Leftrightarrow \left[\frac{r}{s}\right]_{\downarrow}^j \left(\left(\frac{r}{s}\right) - \left[\frac{r}{s}\right]_{\downarrow}\right) &\leq c \left(\left(\frac{r}{s}\right) - 1\right) \\ \Leftrightarrow \left[\frac{r}{s}\right]_{\downarrow}^j &\leq \frac{c\left(\frac{r}{s}-1\right)}{\left(\frac{r}{s}\right)-\left[\frac{r}{s}\right]_{\downarrow}} = \frac{(s-1)\frac{r}{r-s}\left(\frac{r}{s}-1\right)}{\left(\frac{r}{s}\right)-\left[\frac{r}{s}\right]_{\downarrow}} = \frac{(s-1)\frac{r}{s}}{\left(\frac{r}{s}\right)-\left[\frac{r}{s}\right]_{\downarrow}} \\ \Leftrightarrow \left[\frac{r}{s}\right]_{\downarrow}^j &\leq \frac{(s-1)}{1-\frac{s}{r}\left[\frac{r}{s}\right]_{\downarrow}}. \end{aligned}$$

Die beste Abschätzung anhand von (5.28) erhält man somit durch

$$(5.29) \quad A\left(UB_{\frac{r}{s}}^k(n)\right) \geq \left(\frac{r}{s}\right)^{t_0+1} \left(\left[\frac{r}{s}\right]_{\downarrow}^{j_0} - c\right),$$

wobei j_0 das maximale j ist, für das noch

$$(5.30) \quad \left[\frac{r}{s}\right]_{\downarrow}^j \leq \frac{(s-1)}{1-\frac{s}{r}\left[\frac{r}{s}\right]_{\downarrow}}$$

gilt.

Diese Wahl von j ist für hinreichend große n möglich. Mit der Differenz der Koeffizienten aufeinanderfolgender Knoten (3.7)

$$D\left(B_{\frac{r}{s}}^k(n)\right) = s \left(\frac{s}{r}\right)^{n-k+1}; \quad n > k$$

erhält man für die Breiten unseres Unterbaumes bei hinreichend großem n

$$\begin{aligned} B\left(UB_{\frac{r}{s}}^k(n)\right) &= \left(A\left(UB_{\frac{r}{s}}^k(n)\right) - 1\right) D\left(B_{\frac{r}{s}}^k(n)\right) \\ &\stackrel{(5.29)}{\geq} \left(\left(\frac{r}{s}\right)^{t_0+1} \left(\left[\frac{r}{s}\right]_{\downarrow}^{j_0} - c\right) - 1\right) s \left(\frac{s}{r}\right)^{n-k+1}, \end{aligned}$$

mit $n = j_0 + k + t_0$ also

$$\begin{aligned} B\left(UB_{\frac{r}{s}}^k(n)\right) &\geq \left(\left(\frac{r}{s}\right)^{t_0+1} \left(\left[\frac{r}{s}\right]_{\downarrow}^{j_0} - c\right) - 1\right) s \left(\frac{s}{r}\right)^{j_0+t_0+1} \\ &= s \left(\frac{s}{r}\right)^{j_0} \left(\left[\frac{r}{s}\right]_{\downarrow}^{j_0} - c\right) - s \left(\frac{s}{r}\right)^{j_0+t_0+1}. \end{aligned}$$

Für $n \rightarrow \infty$ bzw. $t_0 \rightarrow \infty$ folgt

$$B = B\left(UB_{\frac{r}{s}}^k(\infty)\right) \geq s \left(\frac{s}{r}\right)^{j_0} \left(\left[\frac{r}{s}\right]_{\downarrow}^{j_0} - c\right),$$

mit (5.27) und (5.30) also die Aussage des Satzes.

□□□

Bemerkung 5.31

Es gilt mit $i \in \mathbb{N}_0$

$$0 < d_{\min}(S_i, S_{i+1}) < s,$$

wobei die rechte Ungleichung, die nach Satz 5.19 gelten muß, aus Satz 5.24 unmittelbar abzulesen ist.

Was die linke Ungleichung betrifft, so ist die zu einem existierenden $j \in \mathbb{N}$ mit $\left[\frac{r}{s}\right]_{\downarrow}^{j_0} > c$ gehörende Schranke $d_{\min}^*(S_i, S_{i+1})$ positiv, also auch die nach dem Beweis maximale Schranke $d_{\min}(S_i, S_{i+1})$:

$$d_{\min}(S_i, S_{i+1}) \geq d_{\min}^*(S_i, S_{i+1}) > 0.$$

Beispiel:

Berechnung des minimalen Abstands von zwei benachbarten Sprungstellen zur Basis $\frac{9}{4}$:

$$\frac{r}{s} = \frac{9}{4} > 2.$$

Es gilt $\left[\frac{9}{4}\right]_{\downarrow} = 2$ und j_0 maximal groß mit

$$2^{j_0} \leq \frac{s-1}{1 - \frac{s}{r} \left[\frac{r}{s}\right]_{\downarrow}} = \frac{3}{1 - \frac{8}{9}} = 27.$$

Daraus folgt $j_0 = 4$.

Also ergibt sich für den minimalen Abstand:

$$d_{\min}(S_i, S_{i+1}) = s \left(\frac{s}{r}\right)^{j_0} \left(\left[\frac{r}{s}\right]_{\downarrow}^{j_0} - (s-1)\frac{r}{r-s}\right) = 4 \left(\frac{4}{9}\right)^4 \left(2^4 - \frac{27}{5}\right)$$

$$d_{\min}(S_i, S_{i+1}) \approx 1,654382 \approx \frac{5}{3}, \quad i \in \mathbb{N}_0.$$

Bemerkung 5.32

Der in Beweis zu Satz 5.24 betrachtete Unterbaum $UB_{\frac{r}{s}}$ kann bei entsprechender Kommaebene jeder beliebige Unterbaum sein. Da es im Fall $r \leq 2s - 1$ beliebig lange endliche lineare Teilstücke gibt, somit Unterbäume, deren Breite $B = UB_{\frac{r}{s}}(\infty)$ auf der reellen Achse beliebig klein ist, folgt aus (5.27), daß Sprungstellen hier beliebig dicht liegen können. Da nach Satz 5.19 zwischen zwei aufeinanderfolgenden Vielfachen von s jeweils genau eine Sprungstelle liegt, liegen solche dicht beieinander liegende Sprungstellen jeweils kurz vor bzw. hinter einer Zahl $a \equiv 0 \pmod{s}$, die selbst wegen Bemerkung 5.20. 2. keine Sprungstelle sein kann.

5.3 Berechnung der Sprungstellen

Vorerst werden noch die maximalen Überträge bei der Addition zweier Ganheitsentwicklungen betrachtet, die bei der Berechnung der Sprungstellen wichtig sind. Zum einen ist der Koeffizient $(r - 1)$ von Interesse, da dieses der maximale Koeffizient aller Entwicklungen ist. Zum anderen wird der Koeffizient $(s - 1)$ betrachtet, da dieser für Basen $r \geq 2s - 1$ nach Satz 3.32 der maximale Koeffizient jeder Oberentwicklung ist.

Satz 5.33

Der Übertrag für die Addition zweier $\frac{r}{s}$ -Entwicklungen mit

1. den maximalen Koeffizienten $(r - 1)$ und $(r - 1)$ beträgt maximal νs ,
2. den maximalen Koeffizienten $(r - 1)$ und $(s - 1)$ beträgt maximal $(\nu - 1)s$,
3. den maximalen Koeffizienten $(s - 1)$ und $(s - 1)$ beträgt maximal $(\nu - 2)s$,

wobei $\nu = \left\lfloor \frac{r-2}{r-s} \right\rfloor + 1$ ist.

Beweis:

Sei nun $n = r - s$, also $s = r - n$ mit $n \in \mathbb{N}$.

1.)

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \cdots & (r-1) & \cdots & (r-1) & (r-1) & (r-1) \\
 + & \cdots & (r-1) & \cdots & (r-1) & (r-1) & (r-1) \\
 \hline
 & \cdots & \nu s = \nu(r-n) & \cdots & 2s = 2(r-n) & s = r-n & \\
 \hline
 & \cdots & \nu r & \cdots & 2r & r & \\
 \hline
 & \cdots & (\nu+2)r - (\nu n + 2) & \cdots & 4r - (2n + 2) & 3r - (n + 2) & 2r - 2 \\
 & \cdots & r - (\nu n + 2) & \cdots & r - (2n + 2) & r - (n + 2) & r - 2
 \end{array}$$

Der Übertrag wächst auf diese Weise solange $\nu n + 2 \leq r$ ist, wird also maximal gleich νs , wobei $\nu \in \mathbb{N}_0$ minimal mit

$$\nu n + 2 = \nu(r - s) + 2 > r,$$

also

$$\nu = \left\lfloor \frac{r-2}{r-s} \right\rfloor + 1$$

ist.

Der maximale Übertrag ist somit

$$s \left(\left\lfloor \frac{r-2}{r-s} \right\rfloor + 1 \right).$$

Analog erhält man das Ergebnis in den anderen beiden Fällen.

□□□

Bemerkung 5.34

1. Im Fall $r \geq 2s - 1$ hat man $0 < \frac{r-2}{r-s} < 2$, also

$$\nu = \left[\frac{r-2}{r-s} \right]_{\downarrow} + 1 = 2,$$

also insbesondere im 3. Fall aus Satz 5.33 keine Überträge.

2. Der maximale Übertrag für die Addition zweier $\frac{r}{s}$ -Entwicklungen ist nach Satz 5.33 (1) $s \left(\left[\frac{r-2}{r-s} \right]_{\downarrow} + 1 \right)$. Für minimales $r - s$, also für $r - s = 1$, wird der maximale Übertrag am größten. Damit erhält man den absolut maximalen Übertrag

$$s \left(\left[\frac{r-2}{1} \right]_{\downarrow} + 1 \right) = s(r-1) = s^2.$$

Satz 5.35

Seien die ersten s^{n-1} aufeinanderfolgenden Sprungstellen S_j mit $j = 0, 1, \dots, s^{n-1} - 1$ für $\frac{r}{s}$ -Komma-Ganzzheitsentwicklungen bekannt, so gilt:

$$(5.36) \quad \begin{aligned} S_{j+ts^{n-1}} &\in]S_j + t \cdot s^n - \delta_{ui}; S_j + t \cdot s^n + \delta_o[; \\ i &\in \{1, 2\}; t, n \in \mathbb{N}; j \in \{0, \dots, s^{n-1} - 1\}, \end{aligned}$$

mit

$$(5.37) \quad \delta_o = \frac{(r-1)s}{r-s} \left(\frac{s}{r} \right)^n;$$

und

$$(5.38) \quad \delta_{u1} = s \left[\frac{r-2}{r-s} \right]_{\downarrow} \left(\frac{s}{r} \right)^n; \quad r \geq 2s - 1,$$

$$(5.39) \quad \delta_{u2} = s \left(\left[\frac{r-2}{r-s} \right]_{\downarrow} + 1 \right) \left(\frac{s}{r} \right)^n; \quad r < 2s - 1,$$

womit alle Sprungstellen eingegrenzt sind.

In diesem Satz und dem dazugehörigen Beweis wird aus Gründen der Übersicht eine andere Indizierung der Koeffizienten benutzt:

$$a \stackrel{r/s}{\sim} a_{-k} \cdots a_0, a_1 a_2 \cdots a_m \cdots$$

Beweis:

Sei

$$(5.40) \quad S_j \stackrel{r/s}{\sim} a_{-k_\alpha} \cdots a_0, a_1 \cdots a_n a_{n+1} \cdots$$

die Oberentwicklung der j -ten Sprungstelle, also mit Satz 3.32 $a_i \leq (s-1)$ für $r \geq 2s-1$ und $a_i \leq (r-1)$ für $r < 2s-1$ und $i > 0$.

Obere Grenze für das Sprungstellenintervall:

Mit Bemerkung 5.17 und (5.40) gilt

$$(5.41) \quad a_{-k_\alpha} \cdots a_0 \stackrel{r/s}{\sim} j s.$$

Da alle durch r^n teilbaren Zahlen auf n Nullen enden, sieht die Darstellung der durch r^n teilbaren Zahlen bei anschließender Kommaverschiebung um n Stellen nach links folgendermaßen aus:

$$t r^n \left(\frac{s}{r} \right)^n = t s^n \stackrel{r/s}{\sim} b_{-k_\beta} \cdots b_0, \underbrace{0 \cdots 0}_n; \quad t \in \mathbb{N}.$$

Damit kann diese Entwicklung zu einer unendlichen $\frac{r}{s}$ -Komma-Ganzheitsentwicklung ergänzt werden:

$$t s^n + \delta \stackrel{r/s}{\sim} b_{-k_\beta} \cdots b_0, \underbrace{0 \cdots 0}_n b_{n+1} \cdots; \quad b_i \leq (r-1); \quad i \geq n+1$$

mit

$$\delta \stackrel{r/s}{\sim} 0 \cdots 0, \underbrace{0 \cdots 0}_n b_{n+1} \cdots$$

Sei δ_o eine obere Grenze für solche δ :

$$\delta \leq \delta_o := (r-1) \sum_{i=n+1}^{\infty} \left(\frac{s}{r} \right)^i = \frac{(r-1)s}{r-s} \left(\frac{s}{r} \right)^n.$$

Man hat

$$\begin{array}{rcccccccccccc} & S_j & \stackrel{r/s}{\sim} & \cdots & a_{-k_\alpha} & \cdots & \cdots & a_0, & a_1 & \cdots & a_n & a_{n+1} & \cdots \\ + & t s^n + \delta & \stackrel{r/s}{\sim} & \cdots & \cdots & b_{-k_\beta} & \cdots & b_0, & 0 & \cdots & 0 & b_{n+1} & \cdots \\ \hline S_j + t s^n + \delta & \stackrel{r/s}{\sim} & c_{-k_\gamma} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & c_0, & c_1 & \cdots & c_n & c_{n+1} & \cdots \end{array}$$

mit

$$C^* \stackrel{r/s}{\sim} c_{-k_\gamma} \cdots c_0 \geq a_{k_\alpha} \cdots a_0 + b_{-k_\beta} \cdots b_0 \stackrel{r/s}{\sim} js + ts^n = (j + ts^{n-1})s.$$

$S_j + (ts^n + \delta)$ bzw. $S_j + (ts^n + \delta_o)$ liegt also bereits hinter der ts^{n-1} -ten Sprungstelle nach S_j :

$$S_{j+ts^{n-1}} < S_j + (ts^n + \delta_o).$$

□

Untere Grenze für das Sprungstellenintervall:

Sei

$$(5.42) \quad ts^n - \delta_{ui} \stackrel{r/s}{\sim} e_{-k_\epsilon} \cdots e_0, e_1 \cdots e_n e_{n+1} \cdots; \quad t \in \mathbb{N}, i \in \{1, 2\},$$

wobei δ_{u1} bzw. δ_{u2} der maximal mögliche Übertrag aus Satz 5.33 bei der Addition der Ganzheitsentwicklungen (5.40) und (5.42) zum n -ten Koeffizienten der Summenentwicklungen sei. Für $r \geq 2s - 1$ sind die maximalen Koeffizienten $e_i \leq (r - 1)$ und $a_i \leq (s - 1)$. Also gilt mit Satz 5.33 für den maximalen Übertrag

$$\delta_{u1} = s \left\lfloor \frac{r-2}{r-s} \right\rfloor_{\downarrow} \left(\frac{s}{r} \right)^n; \quad r \geq 2s - 1.$$

Für $r < 2s - 1$ sind die maximalen Koeffizienten $e_i \leq (r - 1)$ und $a_i \leq (r - 1)$. Also gilt mit Satz 5.33 für den maximalen Übertrag

$$\delta_{u2} = s \left(\left\lfloor \frac{r-2}{r-s} \right\rfloor_{\downarrow} + 1 \right) \left(\frac{s}{r} \right)^n; \quad r < 2s - 1.$$

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} & & S_j & \stackrel{r/s}{\sim} & \cdots & a_{-k_\alpha} & \cdots & \cdots & a_0, & a_1 & \cdots & a_n & a_{n+1} & \cdots \\ + & & ts^n - \delta_u & \stackrel{r/s}{\sim} & \cdots & \cdots & e_{-k_\epsilon} & \cdots & e_0, & e_1 & \cdots & e_n & e_{n+1} & \cdots \\ \hline & & S_j + ts^n - \delta_u & \stackrel{r/s}{\sim} & f_{-k_\zeta} & \cdots & \cdots & \cdots & f_0, & f_1 & \cdots & f_n & f_{n+1} & \cdots \end{array}$$

Mit

$$S_j + (ts^n - \delta_u) \stackrel{r/s}{\sim} f_{-k_\zeta} \cdots f_0, f_1 \cdots f_n f_{n+1} \cdots$$

$$C^* \stackrel{r/s}{\sim} f_{-k_\zeta} \cdots f_0, f_1 \cdots f_n 0 \cdots 0 \cdots < S_j + (ts^n - \delta_u)$$

und

$$A^* \stackrel{r/s}{\sim} a_{-k_\alpha} \cdots a_0, a_1 \cdots a_n 0 \cdots 0 \cdots$$

$$B^* \stackrel{r/s}{\sim} e_{-k_\epsilon} \cdots e_0, e_1 \cdots e_n 0 \cdots 0 \cdots$$

gilt dann

$$(5.43) \quad C^* \leq A^* + B^* + \delta_u < A^* + ts^n.$$

Bei der Addition

$$\begin{array}{rcccccccccccc}
 A^* & \overset{r/s}{\sim} & \cdots & a_{-k_\alpha} & \cdots & \cdots & a_0, & a_1 & \cdots & a_n \\
 + & & ts^n & \overset{r/s}{\sim} & \cdots & \cdots & b_{-k_\beta} & \cdots & b_0, & 0 & \cdots & 0 \\
 \hline
 A^* + ts^n & \overset{r/s}{\sim} & d_{-k_\delta} & \cdots & \cdots & \cdots & d_0, & a_1 & \cdots & a_n
 \end{array}$$

enthält d_0 keinen Übertragsanteil.

Mit

$$\begin{array}{rcccc}
 js & \overset{r/s}{\sim} & a_{-k_\alpha} & \cdots & a_0 \\
 ts^n & \overset{r/s}{\sim} & b_{-k_\beta} & \cdots & b_0
 \end{array}$$

hat man also

$$js + ts^n \overset{r/s}{\sim} d_{-k_\delta} \cdots d_0.$$

Aus

$$C^* \overset{r/s}{\sim} f_{-k_\zeta} \cdots f_0, f_1 \cdots f_n \stackrel{(5.43)}{<} d_{-k_\delta} \cdots d_0, a_1 \cdots a_n$$

folgt aber, da die endlichen Ganzheitsentwicklungen lexikographisch angeordnet sind,

$$C \overset{r/s}{\sim} f_{-k_\zeta} \cdots f_0 < d_{-k_\delta} \cdots d_0 \overset{r/s}{\sim} js + ts^n,$$

d.h.

$$S_j + (ts^n - \delta_u) \overset{r/s}{\sim} f_{-k_\zeta} \cdots f_0, f_1 \cdots$$

mit

$$C \overset{r/s}{\sim} f_{-k_\zeta} \cdots f_0 < js + ts^n = (j + ts^{n-1})s.$$

Die ts^{n-1} -te Sprungstelle nach S_j liegt also erst nach $S_j + (ts^n - \delta_u)$:

$$S_j + (ts^n - \delta_u) < S_{j+ts^{n-1}}.$$

□□□

Die endlich vielen Sprungstellen $S_j, j < s^{n-1}$ kann man anhand des Sichere-Stellen-Verfahren beliebig genau berechnen, d.h. in vorgegebene Intervalle einschließen:

$$S_j \in]a_u^{(j)}, a_o^{(j)}[$$

mit $a_u^{(0)} = -\varepsilon$ und $a_o^{(0)} = \varepsilon$ für beliebige positive ε .

Nach (5.36) gilt damit

$$\begin{aligned}
 (5.44) \quad S_{j+ts^{n-1}} &\in]a_u^{(j)} + t \cdot s^n - \delta_{ui}; a_o^{(j)} + t \cdot s^n + \delta_o[; \\
 i &\in \{1, 2\}, \quad t \in \mathbb{N}, \quad j \in \{0, \dots, s^{n-1} - 1\}.
 \end{aligned}$$

Bemerkung 5.45

1. Genau für die reellen Zahlen $c \stackrel{r/s}{\approx} \gamma_v, \gamma_h$, die außerhalb der obigen, die Sprungstellen eingrenzenden Intervalle liegen, sind die Werte γ_v, γ_h anhand von (5.16) eindeutig feststellbar. Diese Art der Ermittlung von γ_v, γ_h wird als **Sprungstellen-Verfahren** bezeichnet.
2. Für die reellen Zahlen $c \stackrel{r/s}{\approx} \gamma_v, \gamma_h$, die innerhalb des die Sprungstelle S_j einschließenden Intervalls liegen, sind die Werte γ_v, γ_h entweder

$$\gamma_v = (j-1)s \wedge \gamma_h = c - (j-1)s$$

oder

$$\gamma_v = js \wedge \gamma_h = c - js,$$

wobei genau für die Sprungstelle S_j beide Werte möglich sind.

5.4 Beispiele für das Sprungstellen-Verfahren

Beispiele für Basen mit $r \geq 2s - 1$

1.) Basis $\frac{3}{2}$ und $n = 7$:

Zunächst werden die ersten 2^6 Sprungstellen S_j , $0 \leq j \leq 63$ durch Intervalle der Länge $0,001$ – im Dezimalsystem – eingegrenzt. Die ersten 32 Sprungstellen sind in Abbildung 5.4 graphisch dargestellt.

j	$a_u^{(j)}$	$a_o^{(j)}$	j	$a_u^{(j)}$	$a_o^{(j)}$
0	$-\varepsilon$	$+\varepsilon$	1	3,24	3,25
2	4,86	4,87	3	7,30	7,31
4	8,45	8,46	<u>5</u>	10,95	10,96
6	12,67	12,68	7	15,72	15,73
8	16,42	16,43	<u>9</u>	19,01	19,02
<u>10</u>	21,08	21,09	11	23,59	23,60
12	24,63	24,64	<u>13</u>	26,96	26,97
14	28,52	28,53	15	31,63	31,64
16	32,27	32,28	17	35,38	35,39
<u>18</u>	36,95	36,96	19	39,34	39,35
20	40,44	40,45	21	42,78	42,79
<u>22</u>	44,94	44,95	23	47,45	47,46
24	48,40	48,41	<u>25</u>	51,20	51,21

j	$a_u^{(j)}$	$a_o^{(j)}$	j	$a_u^{(j)}$	$a_o^{(j)}$
<u>26</u>	53,08	53,09	27	55,43	55,44
28	56,82	56,83	<u>29</u>	59,01	59,02
30	60,67	60,68	31	63,87	63,88
<u>32</u>	64,18	64,19	33	67,41	67,42
34	68,86	68,87	<u>35</u>	71,17	71,18
36	72,60	72,61	<u>37</u>	74,91	74,92
38	76,80	76,81	39	79,62	79,63
40	80,52	80,53	<u>41</u>	83,15	83,16
<u>42</u>	85,23	85,24	43	87,52	87,53
44	88,51	88,52	<u>45</u>	91,01	91,02
46	92,67	92,68	47	95,81	95,82
48	96,27	96,28	49	99,45	99,46
<u>50</u>	101,12	101,13	51	103,30	103,31
52	104,38	104,39	53	106,76	106,77
<u>54</u>	108,91	108,92	55	111,62	111,63
56	112,36	112,37	<u>57</u>	115,20	115,21
<u>58</u>	117,03	117,04	59	119,43	119,44
60	120,78	120,79	<u>61</u>	123,19	123,20
62	124,73	124,74	63	127,85	127,86

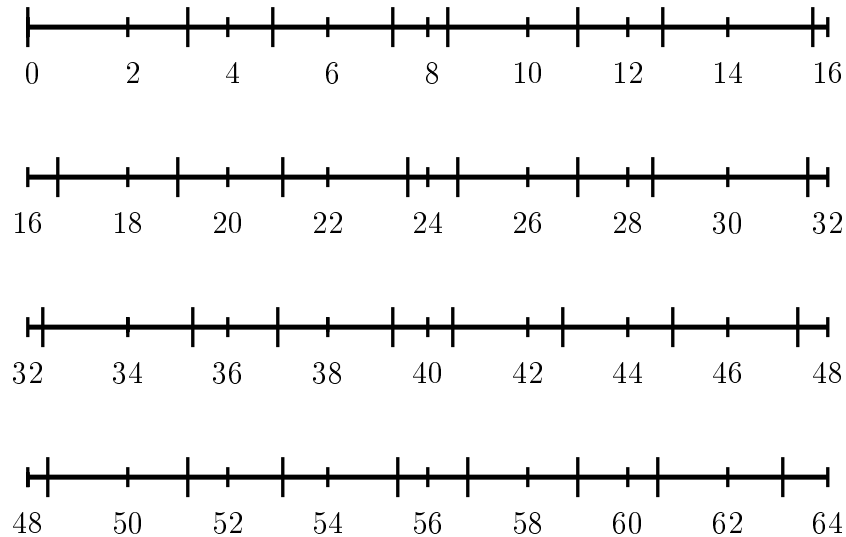


Abbildung 5.4: Graphische Darstellung der ersten 32 Sprungstellen zur Basis $\frac{3}{2}$

Mit (5.37) und (5.38) erhält man für δ_{u1} und δ_o :

$$\delta_{u1} = 2 \left(\frac{2}{3}\right)^7 = \frac{256}{2187} \approx 0,11706$$

und

$$\delta_o = 4 \left(\frac{2}{3}\right)^7 = \frac{512}{2187} \approx 0,23412.$$

Das liefert mit (5.44)

$$S_{j+t \cdot 64} \in \left] a_u^{(j)} + t \cdot 128 - \frac{256}{2187}; a_o^{(j)} + t \cdot 128 + \frac{512}{2187} \right[$$

mit $t \in \mathbb{N}_0; \quad 0 \leq j \leq 2^6 - 1 = 63,$

womit alle Sprungstellen durch Intervalle der Länge

$$0,001 + \delta_{u1} + \delta_o \approx 0,35218$$

eingegrenzt sind.

Mit $S_4 \in]8,451; 8,452[$, $S_5 \in]10,950; 10,951[$ gilt nach (5.16) zum Beispiel für alle $c \in [8,452; 10,950]$

$$c \stackrel{3/2}{\approx} 8, (c - 8).$$

Um nun alle natürlichen Zahlen a in der Form $a \stackrel{3/2}{\approx} \alpha_v, \alpha_h$ darzustellen, müssen wegen Satz 5.3 nur noch die ungeraden Zahlen betrachtet werden.

Für die j , die in der obigen Tabelle durch Unterstreichen markiert sind, liegt in dem Sprungstellenintervall zu $S_{j+ts^{n-1}} = S_{j+t64}$ mit $t \in \mathbb{N}$ eine ungerade Zahl b .

Für alle ungeraden Zahlen $b \stackrel{3/2}{\approx} \beta_v, \beta_h$, die in dem Intervall zur Sprungstelle S_j liegen, gilt nach Bemerkung 5.45 entweder

$$\beta_v = (j-1)2 \wedge \beta_h = b - (j-1)2$$

oder

$$\beta_v = j \cdot 2 \wedge \beta_h = b - j \cdot 2.$$

Das Sprungstellen-Verfahren liefert also folgende Darstellungen für alle Zahlen modulo 128:

Für alle geraden Zahlen a gilt:

$$a \stackrel{3/2}{\approx} a - 2, 2.$$

Für die ungeraden Zahlen gilt mit $b \equiv n \pmod{128}$ und $b \stackrel{3/2}{\approx} \beta_v, \beta_h$ und $\beta_v = b - \beta_h$:

n	β_h	n	β_h	n	β_h	n	β_h
1	1	3	3	5	1	7	3
9	1	11	$3 \vee 1$	13	1	15	3
17	1	19	$3 \vee 1$	21	$3 \vee 1$	23	3
25	1	27	$1 \vee 1$	29	1	31	3
33	1	35	3	37	$3 \vee 1$	39	3
41	1	43	1	45	$3 \vee 1$	47	3
49	1	51	$3 \vee 1$	53	$3 \vee 1$	55	3
57	1	59	$3 \vee 1$	61	1	63	3
65	1	67	3	69	1	71	$3 \vee 1$
73	1	75	$3 \vee 1$	77	1	79	3
81	1	83	$3 \vee 1$	85	$3 \vee 1$	87	3
89	1	91	$3 \vee 1$	93	1	95	3
97	1	99	3	101	$3 \vee 1$	103	3
105	1	107	1	109	$3 \vee 1$	111	3
113	1	115	$3 \vee 1$	117	$3 \vee 1$	119	3
121	1	123	$3 \vee 1$	125	1	127	3.

2.) Basis $\frac{9}{4}$ und $n = 3$:

Zunächst werden die ersten 4^2 Sprungstellen S_j , $0 \leq j \leq 15$ durch Intervalle der Länge $0,001$ – im Dezimalsystem – eingegrenzt. Die ersten 16 Sprungstellen sind in Abbildung 5.5 graphisch dargestellt.

j	$a_u^{(j)}$	$a_o^{(j)}$	j	$a_u^{(j)}$	$a_o^{(j)}$
0	$-\varepsilon$	$+\varepsilon$	<u>1</u>	5,64	5,65
2	9,59	9,60	3	12,70	12,71
<u>4</u>	16,87	16,88	5	21,58	21,59
<u>6</u>	25,35	25,36	7	28,58	28,59
<u>8</u>	32,85	32,86	<u>9</u>	37,97	37,98
<u>10</u>	41,23	41,24	11	45,45	45,46
12	48,56	48,57	<u>13</u>	53,93	53,94
<u>14</u>	57,04	57,05	<u>15</u>	61,20	61,21

Mit (5.37) und (5.38) erhält man für δ_{u1} und δ_o :

$$\delta_{u1} = 4 \left(\frac{4}{9} \right)^3 = \frac{256}{729} \approx 0,3512$$

und

$$\delta_o = \frac{32}{5} \left(\frac{4}{9} \right)^3 = \frac{2048}{3645} \approx 0,5605.$$

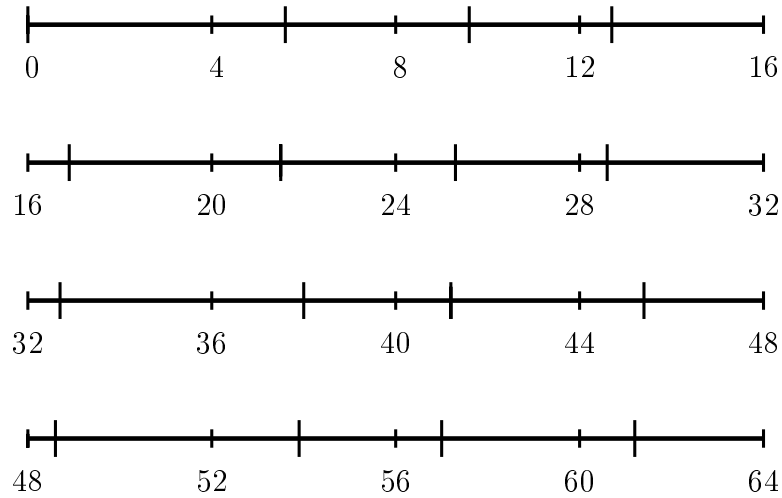


Abbildung 5.5: Graphische Darstellung der ersten 16 Sprungstellen zur Basis $\frac{9}{4}$

Das liefert

$$S_{j+t \cdot 16} \in \left] a_u^{(j)} + t \cdot 64 - \frac{256}{729}; a_o^{(j)} + t \cdot 64 + \frac{2048}{3645} \right[,$$

$$\text{mit } t \in \mathbb{N}_0, 0 \leq j \leq 4^2 - 1 = 15,$$

womit alle Sprungstellen durch Intervalle der Länge

$$0,001 + \delta_{u1} + \delta_o = 0,9127$$

eingegrenzt sind.

Mit $S_4 \in]16, 87; 16, 88[$, $S_5 \in]21, 58; 21, 59[$ gilt nach (5.16) zum Beispiel für alle $c \in [16, 88; 21, 58]$

$$c \approx^{9/4} 16, (c - 16).$$

Um nun alle natürlichen Zahlen a in der Form $a \approx^{9/4} \alpha_v, \alpha_h$ darzustellen, müssen wegen Satz 5.3 nur noch die Zahlen, die nicht durch 4 teilbar sind betrachtet werden.

Für die j , die in der obigen Tabelle durch Unterstreichen markiert sind, liegt in dem Sprungstellenintervall zu $S_{j+ts^{n-1}} = S_{j+t \cdot 16}$ mit $t \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl $b \not\equiv 0 \pmod{4}$.

Dieses sind die Zahlen $b > 64$ mit

$$b \equiv 6, 17, 25, 33, 38, 41, 54, 57, 61 \pmod{64},$$

deren Darstellung $b \stackrel{9/4}{\approx} \beta_v, \beta_h$ mit $n = 3$ also noch nicht eindeutig festgestellt werden kann.

Nach Bemerkung 5.45 gilt für sie

$$\beta_v = (j - 1)4 \wedge \beta_h = b - (j - 1)4$$

oder

$$\beta_v = j \cdot 4 \wedge \beta_h = b - j \cdot 4.$$

Daraus erhält man also mit dem Sprungstellen-Verfahren folgende Darstellungen für alle Zahlen $b \equiv n \bmod 64$ und $b \stackrel{9/4}{\approx} \beta_v, \beta_h$ und $\beta_v = b - \beta_h$:

n	β_h	n	β_h	n	β_h	n	β_h
1	1	2	2	3	3	4	4
5	5	6	$2 \vee 6$	7	3	8	4
9	5	10	2	11	3	12	4
13	1	14	2	15	3	16	4
17	$5 \vee 1$	18	2	19	3	20	4
21	5	22	2	23	3	24	4
25	$5 \vee 1$	26	2	27	3	28	4
29	1	30	2	31	3	32	4
33	$5 \vee 1$	34	2	35	3	36	4
37	5	38	$2 \vee 6$	39	3	40	4
41	5	42	2	43	3	44	4
45	$5 \vee 1$	46	2	47	3	48	4
49	1	50	2	51	3	52	4
53	5	54	$2 \vee 6$	55	3	56	4
57	$5 \vee 1$	58	2	59	3	60	4
61	$5 \vee 1$	62	2	63	3	64	4.

Bemerkung 5.46

Den Abbildungen 5.4 und 5.5 ist zu entnehmen, daß für diese Beispiele mit $r \geq 2s - 1$ entsprechend Satz 5.19 in jedem Intervall $]sm, s(m + 1)[$, $m \in \mathbb{N}$ genau eine Sprungstelle liegt.

Beispiele für Basen mit $r < 2s - 1$

3.) Basis $\frac{4}{3}$ und $n = 3$:

Zunächst werden die ersten $3^{n-1} = 3^2 = 9$ Sprungstellen S_j , $0 \leq j \leq 8$ berechnet, obwohl mit (5.37) und (5.39) $\delta_{u2} = \delta_o = 9 \left(\frac{3}{4}\right)^3 \approx 3,797$ sehr groß sind. Um ein sinnvolles δ zu erhalten, müßte n sehr groß gewählt werden. Zum Beispiel gilt $\delta_{u2} = \delta_o \approx 0,507$ bei $n = 10$, was aber zur Folge hat, daß man Sprungstellen durch Einschachtelung bis zur Zahl $3^9 = 19683$ berechnen müßte. Es sollen nun trotz der schlechten Abschätzung für δ hier die ersten 9 Sprungstellen berechnet und graphisch dargestellt werden (Abbildung 5.6):

j	$a_u^{(j)}$	$a_o^{(j)}$	j	$a_u^{(j)}$	$a_o^{(j)}$
0	$-\varepsilon$	$+\varepsilon$	1	6,22	6,23
2	8,30	8,31	3	11,07	11,08
4	14,76	14,77	5	19,09	19,10
6	19,68	19,69	7	25,45	25,46
8	26,24	26,25			

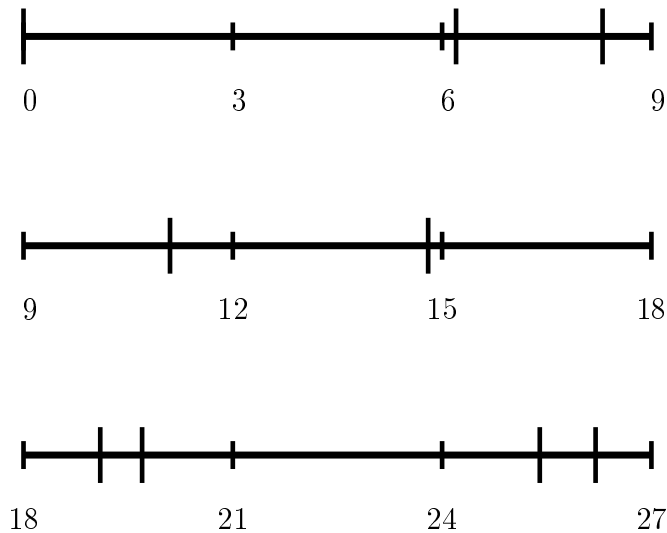


Abbildung 5.6: Graphische Darstellung der ersten 9 Sprungstellen zur Basis $\frac{4}{3}$.

4.) Basis $\frac{5}{4}$ und $n = 3$:

Ein weiteres Beispiel für die Basis $r < 2s - 1$. Vorab werden die Sprungstellen S_j bis $4^2 = 16$ durch Einschachtelung berechnet. Hier hat man nach (5.37) und (5.39) für $\delta_{u2} = \delta_o = 16 \left(\frac{4}{5}\right)^3 = 8,192$.

Es werden die ersten 16 Sprungstellen berechnet und graphisch dargestellt (Abbildung 5.7):

j	$a_u^{(j)}$	$a_o^{(j)}$	j	$a_u^{(j)}$	$a_o^{(j)}$
0	$-\varepsilon$	$+\varepsilon$	1	10,74	10,75
2	13,43	13,44	3	16,79	16,80
4	20,99	21,00	5	26,24	26,25
6	30,50	30,51	7	32,80	32,81
8	38,13	38,14	9	41,00	41,01
10	47,66	47,67	11	50,78	50,79
12	51,25	51,26	13	54,58	54,59
14	63,48	63,49	15	64,06	64,07

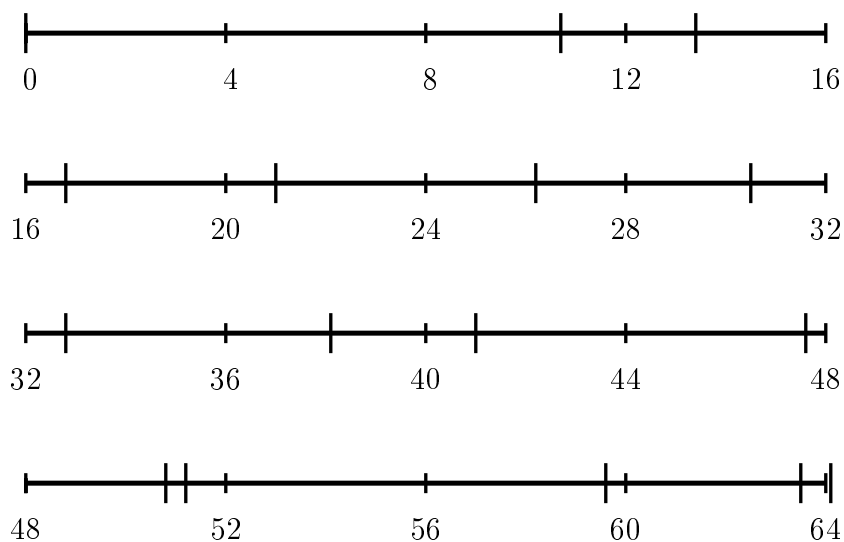


Abbildung 5.7: Graphische Darstellung der ersten 16 Sprungstellen zur Basis $\frac{5}{4}$.

Bemerkung 5.47

Den Abbildungen 5.6 und 5.7 ist zu entnehmen, daß für diese Beispiele mit $r < 2s - 1$ der Satz 5.19 nicht mehr gilt, da nicht mehr in jedem Intervall $]sm; s(m + 1)[$, $m \in \mathbb{N}$ genau eine Sprungstelle liegt.

5.5 Betrachtungen für Basen mit $r < 2s - 1$

Bemerkung 5.48

Gelänge es für die Basen $r < 2s - 1$ die Sprungstellenintervalle so klein zu machen, daß keine Überlappungen der Intervalle vorkämen, so wäre das der Beweis dafür, daß keine überambigen Zahlen existieren, da die Existenz mehrfacher Sprungstellen gleichbedeutend mit der Existenz überambiger Zahlen ist.

Die Lösung dieses Problems erscheint schwierig, wenn nicht unmöglich. Die Frage, ob überambige Zahlen existieren, bleibt also weiterhin unbeantwortet.

Damit läßt sich also die Vermutung 3.26, daß keine linearen Unterbäume für $r < 2s - 1$ existieren, auch nicht beweisen.

Satz 5.49

Für $\frac{r}{s} > 1$ kann die Vielfachheit einer Sprungstelle nicht größer sein als $\left[\frac{r-1}{r-s}\right]^\uparrow -$

1. S_j könnte also maximal $\left[\frac{r-1}{r-s}\right]^\uparrow \frac{r}{s}$ -Komma-Gantheitsentwicklungen besitzen.

Beweis:

Der maximale Wert nach dem Komma ist nach Hilfssatz 3.11 kleiner als $\frac{(r-1)s}{r-s}$. Bei jeder Sprungstelle steigt der Wert vor dem Komma um s an und der Wert nach dem Komma wird um s verringert. Es gilt also für die Vielfachheit der Sprungstelle

$$\left[\frac{(r-1)s}{r-s} : s\right]^\uparrow - 1 = \left[\frac{r-1}{r-s}\right]^\uparrow - 1.$$

□□□

Bemerkung 5.50

Für $r \geq 2s - 1$ ist $\left[\frac{(r-1)}{r-s}\right]^\uparrow \leq 2$, da mit $s \leq \frac{r+1}{2}$

$$\frac{r-1}{r-s} \leq \frac{r-1}{r-\frac{r+1}{2}} = \frac{2(r-1)}{r-1} = 2$$

gilt. Das zeigt erneut, daß es keine überambigen Zahlen für $r \geq 2s - 1$ gibt (vgl. Bemerkung 3.31).

Bemerkung 5.51

Wenn $\frac{r}{s}$ gegen 1 strebt, dann strebt die oben berechnete maximale Vielfachheit der Sprungstellen gegen ∞ .

Beweis:

$\frac{r}{s} \rightarrow 1$ kann nur für $r \rightarrow \infty$ gelten, da $r, s \in \mathbb{N}$. Dann hat man aber auch $\frac{r-1}{s} \rightarrow 1$ und damit

$$\lim_{\frac{r}{s} \rightarrow 1} \left[\frac{r-1}{r-s} \right]^{\uparrow} - 1 = \lim_{\frac{r}{s} \rightarrow 1} \left[\frac{\frac{r-1}{s}}{\frac{r}{s} - 1} \right]^{\uparrow} - 1 = \infty.$$

□□□

Satz 5.52

Genau dann, wenn die obige maximale Vielfachheit der Sprungstellen n ist und es damit für diese maximal $(n+1) \frac{r}{s}$ -Komma-Ganzzheitsentwicklungen geben könnte, gilt für die Basis

$$\frac{n + \frac{1}{2}}{n} \leq \frac{r}{s} < \frac{n}{n-1} \quad (= \infty \text{ für } n = 1).$$

Beweis:

Mit Satz 5.49 gilt $n < \frac{r-1}{r-s} \leq n+1$.

Man hat

$$\begin{aligned} 1. \quad n < \frac{r-1}{r-s} &\iff r < \frac{sn-1}{n-1} \quad \text{und} \\ 2. \quad \frac{r-1}{r-s} \leq n+1 &\iff r \geq \frac{(n+1)s-1}{n}; \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Damit erhält man für die Basis $\frac{r}{s}$:

$$\begin{aligned} 1. \quad \frac{r}{s} < \frac{sn-1}{s(n-1)} &= \frac{n-\frac{1}{s}}{n-1} < \frac{n}{n-1} \quad \text{und} \\ 2. \quad \frac{r}{s} \geq \frac{s(n+1)-1}{sn} &= \frac{n+1-\frac{1}{s}}{n} \geq \frac{n+\frac{1}{2}}{n}; \quad s \geq 2. \end{aligned}$$

Es gilt also insgesamt für $\frac{r}{s}$:

$$\frac{n + \frac{1}{2}}{n} \leq \frac{r}{s} < \frac{n}{n-1} \quad n \in \mathbb{N}.$$

□□□

Nach Satz 5.52 hat man

$$\begin{aligned} n = 1 &\implies \frac{3}{2} \leq \frac{r}{s} < \infty \\ n = 2 &\implies \frac{5}{4} \leq \frac{r}{s} < 2 \\ n = 3 &\implies \frac{7}{6} \leq \frac{r}{s} < \frac{3}{2} \\ n = 4 &\implies \frac{9}{8} \leq \frac{r}{s} < \frac{4}{3} \\ n = 5 &\implies \frac{11}{10} \leq \frac{r}{s} < \frac{5}{4} \\ n = 6 &\implies \frac{13}{12} \leq \frac{r}{s} < \frac{6}{5} \\ n = 7 &\implies \frac{15}{14} \leq \frac{r}{s} < \frac{7}{6} \\ &\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots, \end{aligned}$$

bzw.

$$2 \leq \frac{r}{s} \implies n = 1$$

$$\frac{3}{2} \leq \frac{r}{s} \implies n \leq 2$$

$$\frac{4}{3} \leq \frac{r}{s} \implies n \leq 3$$

$$\frac{5}{4} \leq \frac{r}{s} \implies n \leq 4$$

$$\frac{6}{5} \leq \frac{r}{s} \implies n \leq 5$$

$$\frac{7}{6} \leq \frac{r}{s} \implies n \leq 6$$

$$\vdots \qquad \qquad \vdots \quad .$$

Zusammenfassung

Aufbauend auf der Arbeit von K. Burde [1] zu Zahlenentwicklungen mit gebrochenen Basen standen im Mittelpunkt dieser Arbeit die unendlichen $\frac{r}{s}$ -Komma-Ganzheitsentwicklungen von allen positiven reellen Zahlen.

Zur anschaulichen Darstellung aller Ganzheitsentwicklungen wurde ein $\frac{r}{s}$ -Wurzelbaum entwickelt, an dem die Entwicklungen lexikographisch geordnet ablesbar sind. Mit Hilfe dieses Baumes konnten einige Beweise (u.a. Existenz und Eindeutigkeit) durchgeführt werden.

Die Existenz der $\frac{r}{s}$ -Komma-Ganzheitsentwicklungen für alle positiven reellen Zahlen konnte bewiesen werden, allerdings gab es bezüglich der Eindeutigkeit dieser Darstellungen Einschränkungen für die Basen. Es zeigte sich, daß für Basen mit $r \geq 2s - 1$, wie bei allen g -adischen Entwicklungen, maximal zwei Darstellungen für eine Zahl möglich sind, während es für Basen mit $r < 2s - 1$ auch mehr sein könnten.

Es konnte ein Verfahren entwickelt werden, mit dem die Berechnung der $\frac{r}{s}$ -Komma-Ganzheitsentwicklungen möglich ist und mit dem man endlich viele Stellen der unendlichen Entwicklung sicher angeben kann.

Eine interessante Entdeckung war, daß jede beliebige Endziffernfolge in einer $\frac{r}{s}$ -Komma-Ganzheitsentwicklung realisierbar ist. Darüber hinaus wurde noch ein Algorithmus gefunden, der die Berechnung einer Zahl ermöglicht, für die diese endliche Ziffernfolge im $\frac{r}{s}$ -System vorgegeben wird.

Die Untersuchung der Entwicklungen aller positiven reellen Zahlen auf Vor- und Nachkommawerte führte zu einer Charakterisierungsmöglichkeit der $\frac{r}{s}$ -Komma-Ganzheitsentwicklungen. Es gelang, Sprungstellen, d.h. Stellen, bei denen sich der Vorkommawert verändert, für begrenzte Bereiche in sehr kleine Intervalle einzuschränken. Damit konnten dann für den gesamten Bereich \mathbb{R}^+ Intervalle berechnet werden, in denen sich jeweils eine weitere Sprungstelle befindet.

In der gesamten Arbeit mußten Basen $\frac{r}{s}$ mit $r < 2s - 1$ und $r \geq 2s - 1$ unterschieden werden. Die für Basen mit $r \geq 2s - 1$ gefundenen Ergebnisse konnten nicht auf Basen mit $r < 2s - 1$ übertragen werden. Damit bleibt u.a. die Frage nach der Existenz überambiger Zahlen offen und bietet Potential für zukünftige Forschungsarbeiten zu dieser Thematik.

Literaturverzeichnis

- [1] **Burde, K.**, Das Problem der Abzählreime und Zahlenentwicklungen mit gebrochenen Basen, Journal of Number Theory, Vol. 26, Nr. 2 (1987) S. 192-209.
- [2] **Burde, K.**, Mathematische Unterhaltungen, Spektrum der Wissenschaft (Juli 1994), S. 10-15.
- [3] **Eggan, L. C. and Vanden Eynden C.L.**, „Decimal “ expansions to nonintegral bases, Amer. Math. Monthly 73 (1966) S. 576-582.
- [4] **Kaufmann, A.**, Einführung in die Graphentheorie, R. Oldenbourg Verlag, München und Wien 1971.
- [5] **Kobert, H.**, On quasi-decimals and on arithmetical properties of certain perfect sets and monoton functions, J. London Math. Soc. 28 (1953) S. 47-58.
- [6] **Pfeifer, E.**, Das verallgemeinerte Josephusproblem und Zahlenentwicklungen mit gebrochenen Basen, Dissertation, Braunschweig 1996.
- [7] **Wilson, R.J.**, Einführung in die Graphentheorie, Vandenhoeck und Ruprecht, Göttingen, 1972.